

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОГРАНИЧЕННЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается аналитическая модель ограниченного вихревого течения с допущением, что тангенциальная скорость зависит только от радиуса. Проводится сопоставление расчетных распределений циркуляции с экспериментальными данными. Демонстрируется возможность использования данной модели для описания течения в проточной вихревой камере.

1. ВВЕДЕНИЕ

Закрученные течения широко используются в различных отраслях современной энергетической и химической промышленности. Закрутка потока связана, как правило, с необходимостью интенсификации процессов тепло-массообмена в энергетических установках и аппаратах химической технологии. В ряде случаев она служит для снижения интенсивности процессов переноса, например, для стабилизации плазменных струй.

Несмотря на изучение вихревых камер в течение многих лет, многие вопросы остаются неясными. Прямое решение уравнений Навье-Стокса для столь сложного трехмерного интенсивно закрученного потока связано с большими математическими трудностями. Поэтому разработка упрощенных моделей, описывающих данное явление, остается актуальной задачей.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ввиду разнообразия вихревых камер и сложности происходящего в них движения исследователи применяют различные методы решения этой задачи. Их условно можно разделить на три группы: интегральные модели; теоретические модели с тангенциальной скоростью, зависящей только от радиуса; модели течения с тангенциальной скоростью, зависящей как от радиуса, так и от осевой координаты.

В данной работе рассматривается модель течения с тангенциальной скоростью, зависящей только от радиуса [1]. Эта модель построена для трехмерной картины течения в вихревой камере с учетом влияния вторичных течений на торцевых стенках на основное течение в трубке. При выводе уравнений взаимодействия предполагается, что жидкость несжимаема и обладает постоянной вязкостью. Также считается, что течение стационарно и осесимметрично.

Исследуемое течение разделяется на три области, показанные на рис. 1.

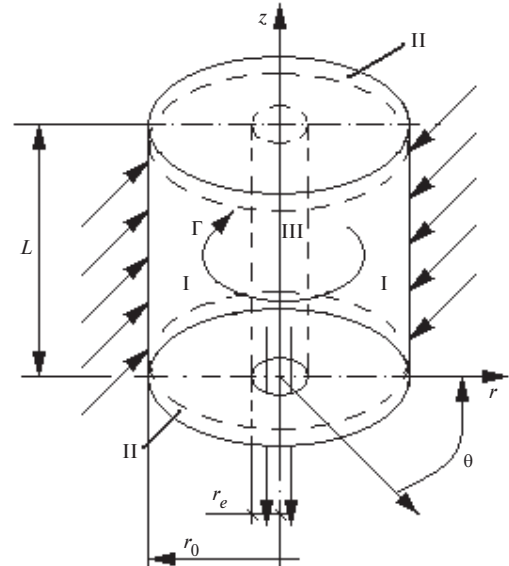


Рис. 1. Разделение потока на три области: I – область первичного течения; II – пограничные торцевые слои; III – воображаемый цилиндр, течение вблизи оси камеры

В каждой из этих областей используются соответствующие решения, а совокупная картина получается путем наложения необходимых условий сопряжения. В областях I и III используется решение Левеллена [2], а в области II – решение Ротта [3].

Трехмерное движение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью с учетом стационарности и осесимметричности течения в цилиндрической системе координат описывается системой дифференциальных уравнений:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial r} = 0; \quad (1)$$

уравнения движения

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rv}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

Введением осесимметричной функции тока и ряда безразмерных величин и комплексов эта сис-

тема уравнений сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению для безразмерной циркуляции $\tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}$:

$$2\eta\tilde{\Gamma}'' - \text{Re}_r f\tilde{\Gamma}' = 0. \quad (5)$$

Используя граничные условия $\Gamma=0$ при $\eta=0$ и $\Gamma=\Gamma_0$ при $\eta=1$, уравнение (5) можно проинтегрировать:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = c_1 \int_0^\eta \exp\left[\frac{\text{Re}_r}{2} \int_0^\eta \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta\right] d\eta, \quad (6)$$

где $c_1 = \left\{ \int_0^1 \exp\left[\frac{\text{Re}_r}{2} \int_0^\eta \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta\right] d\eta \right\}^{-1}$.

Тогда при заданной величине радиального числа Рейнольдса и заданном радиальном распределении f распределение циркуляции определяется единственным образом.

Распределение f определяется из рассмотрения течения в пограничном слое на торцевых стенках. Используя результаты анализа Ротта по исследованию пограничного слоя на торцевых стенках и предполагая, что некоторая часть ζ объемного расхода в пограничном слое при $r=r_e$ эжектируется, записываем выражения для распределения f в области I и области III:

$$f_I = 1 - A \left[\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma_0} \right]^4 \cdot \int_\eta^1 \left[\frac{\Gamma_0}{\Gamma(\eta)} \right]^3 \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}}, \quad \eta_e < \eta \leq 1; \quad (7)$$

$$f_{III} = \frac{\eta}{\eta_e} \left\{ 1 - (1-\zeta)A \left[\frac{\Gamma(\eta_e)}{\Gamma_0} \right]^4 \int_{\eta_e}^1 \left[\frac{\Gamma_0}{\Gamma(\eta)} \right]^3 \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}} \right\},$$

$$0 \leq \eta \leq \eta_e. \quad (8)$$

Уравнения (6), (7) и (8) определяют f и $\tilde{\Gamma}$ в зависимости от радиуса и параметров $\text{Re}_r, A, \frac{r_e}{r_0}, \zeta$.

3. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для выполнения расчета использовались геометрические и расходные данные по двум вихревым камерам с боковой закруткой потока, взятые из работ [4] и [5]. Одна из камер [4] с завихрителем №3 является проточной, камера [5] – непроточная. В качестве условия проточности вихревой камеры использовалась формула, предложенная в работе [6]:

$$\text{Re}_r^{0.25} \cdot \text{Ro}^{1.25} > 2.38 \left(1 - \frac{r_e}{r_0} \right). \quad (9)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА И ИХ ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Математическая модель, описывающая течение в вихревой камере, включает в себя уравнение неразрывности и уравнения Навье-Стокса. Уравнения, полученные после ряда преобразований, интегрировались методом трапеций, нелинейность устранялась методом итераций. Решения получены в виде распределений безразмерной циркуляции $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ и безразмерной части функции тока f по радиусу камеры.

На рис.2 приведены результаты тестового расчета для двух различных комбинаций определяющих параметров из статьи [1].

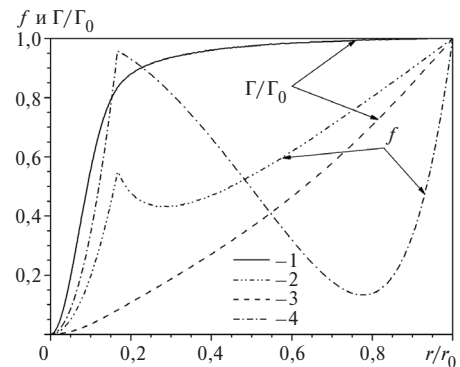


Рис. 2. Распределения: 1,3 – безразмерной циркуляции Γ/Γ_0 и 2,4 – безразмерной части функции тока f , линейно связанной с z , по радиусу при: 1,2 – $\text{Re}_r = -10, A = 1$; 3,4 – $\text{Re}_r = -1, A = 10$

Расчетные данные для проточной камеры при $\text{Re}_r = -43, A = 0.03, \frac{r_e}{r_0} = \frac{15}{80}$ представлены на рис. 3.

Как видно из сравнения распределений $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$, расчетные значения удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными. Распределение f подтверждает вывод о том, что камера действительно является проточной.

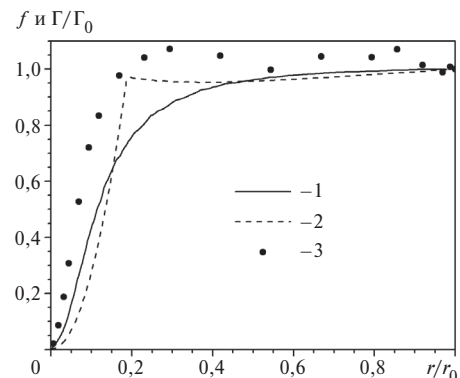


Рис. 3. Распределения: 1 – безразмерной циркуляции Γ/Γ_0 и 2 – безразмерной части функции тока f по радиусу для проточной камеры, 3 – данные по циркуляции [4]

На рис. 4 показаны распределения относительной циркуляции и функции тока по радиусу для непроточной вихревой камеры с боковым вдувом. По распределению f можно сделать вывод, что уже начиная со входа потока в камеру происходит уход потока в торцевые пограничные слои. Расчетное распределение циркуляции при данных параметрах

$$Re_r = -15, A = 0.28, \frac{r_e}{r_0} = \frac{15}{100}$$

не сходится с экспериментальными данными, что видно из рисунка.

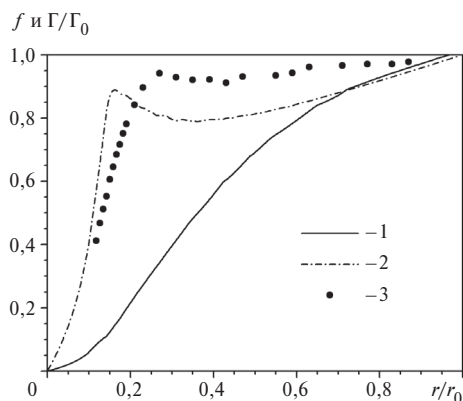


Рис. 4. Распределения: 1 – безразмерной циркуляции Γ/Γ_0 и 2 – безразмерной части функции тока f по радиусу для проточной камеры, 3 – данные по циркуляции [5]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическая модель, предложенная авторами статьи [1], позволяет удовлетворительно рассчитать распределение циркуляции по радиусу вихревой камеры с боковым вдувом для проточных камер. Расхождение расчетных и экспериментальных данных можно объяснить наличием боковых пограничных слоев, а также тем, что в данной модели не учитывается способ боковой закрутки (дырочный или щелевой завихритель, по всей длине камеры или только части). Расчет течения в непроточной камере приводит к значительным погрешностям в определении циркуляции.

Автор выражает благодарность за помощь в проведении исследований профессору член-корр. РАН Э.П. Волчкову и м.н.с. М.С. Макарову. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-6965.2006.8.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$$A = \frac{0.27}{(Re_t)^{1/5}} \left(\frac{\Gamma_0 r_0}{Q_0 L} \right) — \text{параметр взаимодействия пограничного слоя;}$$

f — безразмерная часть функции тока, линейно связанная с z ;

f_{ex} — площадь входного сечения завихрителя, m^2 ;

L — длина вихревой камеры, м;

P — давление, N/m^2 ;

$Re_r = u_0 r_0 / \nu$ — радиальное число Рейнольдса;

$Re_t = v_0 r_0 / \nu$ — число Рейнольдса для тангенциального течения;

$Ro = \frac{f_{ex}}{r_0^2 \cdot \cos \psi_{ex}}$ — число Россби, характеризующее геометрию вихревой камеры;

r — радиальная координата, м;

u — радиальная скорость, положительное направление от оси трубы, м/с;

v — тангенциальная скорость, м/с;

w — осевая скорость, м/с;

z — осевая координата, м;

$\Gamma = v \cdot r$ — циркуляция, m^2/c ;

$\eta = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2$ — безразмерная радиальная координата;

ν — кинематическая вязкость, m^2/c ;

ρ — плотность, kg/m^3 ;

Ψ_{ex} — угол между осью входного канала бокового завихрителя и радиусом, град;

ζ — часть объемного расхода в пограничном слое, которая при $r = r_e$ эжектируется.

Индексы:

0 — значение на внешней границе вихревой камеры;

e — значение на кромке выходного отверстия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенцвейг М.Л., Левеллен В.С., Росс Д.Ш. Ограниченные вихревые течения при взаимодействии с пограничным слоем // Ракетная техника и космонавтика. 1964. № 12. С. 94–103.
2. Lewellen W.S. A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation // J. Fluid Mech. 1962. N 14. P. 420–432.
3. Rott N. Turbulent boundary layer development on the end walls of a vortex chamber // Aerospace Corp. Rept. ATN-62(9202)-1. July, 1962.
4. Смутьский И.И. Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. Новосибирск: Наука, 1992. 334 с.
5. Семенов С.В. Аэродинамика и теплообмен в торцевом пограничном слое вихревой камеры: Дис ... канд. техн. наук. - 01.04.14./ АН СССР Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики. Новосибирск, 1987. 198 с.
6. Аэродинамика и тепломассообмен в ограниченных вихревых потоках/С.С. Кутателадзе, Э.П. Волчков, В.И. Терехов. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1987. 282 с.