

## НАРУШЕНИЕ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ТРЕНИЕМ И ТЕПЛООБМЕНОМ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕПЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

### АННОТАЦИЯ

Представлены результаты исследования влияния неподобия граничных условий на нарушение аналогии между процессами трения и теплообмена.

Получено аналитическое решение задачи о ламинарном и турбулентном движении жидкости вдоль пластины при наиболее приближенном к реальному изменении ее температуры по ходу течения жидкости. Проведено сопоставление полученных результатов с результатами численного моделирования, осуществленного с использованием программного продукта Phoenix. Определен круг режимных параметров теплообмена, качественно и количественно определяющих влияние неизотермичности на теплообмен. Показано, что при определенных условиях неизотермичность поверхности может значительно увеличивать или уменьшать теплоотдачу по сравнению со случаем изотермичной пластины.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При расчете теплообмена в теплообменных аппаратах часто используются критериальные зависимости для теплоотдачи, подразумевающие соблюдение аналогии между трением и теплообменом. Это допущение является следствием схожести уравнений, описывающих процессы переноса. На практике существуют факторы, нарушающие аналогию. Среди хорошо исследованных механизмов нарушения аналогии можно выделить отличие числа Прандтля от единицы [1, 2], переменность теплофизических свойств вещества [2, 5], наличие вдува/отсоса вещества на поверхности [5] и наличие источников/стоков вещества (в частности, при протекании химических реакций [3]).

Еще одним механизмом, могущим привести к нарушению аналогии между трением и теплообменом, является неподобие граничных условий для скорости и температуры.

### 2. НЕИЗОТЕРМИЧНОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ ТЕПЛООБМЕНА В ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТАХ

Аналитическое решение задачи о распределении температуры теплоносителей в прямоточных и противоточных теплообменных аппаратах, полученное в предположении о постоянстве коэффициентов теплоотдачи и неизменности теплофизических свойств, показывает, что закон изменения температуры поверхности теплообмена по длине можно достаточно хорошо описать зависимостью следующего вида:

$$t_c = C_1 + C_2 \cdot e^{C_3 x}, \quad (1)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – константы, имеющие следующий вид:

$$C_1 = t'_z - \frac{\Delta t_{\text{общ}}}{1 \pm (W_z/W_x)}, \quad (2)$$

$$C_2 = \Delta t \cdot \left( \frac{1}{1 \pm (W_z/W_x)} - \frac{K}{\alpha_z} \right), \quad (3)$$

$$C_3 = -mBd, \quad (4)$$

где  $m = \frac{1}{W_z} \pm \frac{1}{W_x}$ ; знаки “+” и “–” соответствуют

прямоточному и противоточному движению теплоносителей соответственно.

Как видно из (1), амплитуда неизотермичности будет определяться следующими параметрами:

- 1) длиной рассматриваемого участка;
- 2) схемой движения теплоносителей (прямоток, перекрестный ток или противоток);
- 3) температурой одного из теплоносителей и температурным напором на входе в аппарат;
- 4) средней теплоотдачей со стороны одного из теплоносителей и средней теплопередачей на рассматриваемом участке;
- 5) водяными эквивалентами теплоносителей;
- 6) геометрией поверхности теплообмена.

### 3. ЗАДАЧА О ТЕПЛООБМЕНЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ И ТУРБУЛЕНТНОМ ОБТЕКАНИИ НЕИЗОТЕРМИЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассматривалась задача о конвективном теплообмене при течении жидкости вдоль неизотермичной пластины. Закон изменения температуры трубы по длине был взят в соответствии с (1). Решение задачи проводилось аналитически.

#### 3.1. Математическая модель и допущения

Исследуется полуограниченная пластина, обтекаемая в продольном направлении стационарным потоком несжимаемой жидкости, имеющим температуру  $t_\infty$  и скорость  $w_\infty$ , которые принимаются постоянными по длине  $x$ . В качестве обтекающей жидкости рассматриваем модельный газ с постоянными теплофизическими свойствами и числом Прандтля, равным единице. Не принимаются в рас-

смотрение факторы, которые наряду с неизотермичностью поверхности также могут приводить к нарушению аналогии между теплообменом и трением. С учетом указанных выше допущений уравнения переноса импульса и тепла будут иметь следующий вид в приближении пограничного слоя:

$$\begin{cases} w_x (\partial w_x / \partial x) + w_y (\partial w_x / \partial y) = (v + v_t) (\partial^2 w_x / \partial y^2); \\ \partial w_x / \partial x + \partial w_y / \partial y = 0; \\ w_x (\partial t / \partial x) + w_y (\partial t / \partial y) = (a + a_t) (\partial^2 t / \partial y^2). \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) решается при граничных условиях:

при  $y = 0$  и  $x > 0$ :  $w_x = w_y = 0$ ,  $t = t_c(x)$ ;

при  $y \geq \infty$ :  $w_x = w_\infty$ ,  $t = t_\infty$ .

Хотя уравнения переноса импульса и тепла подобны в системе (5), температурный профиль будет отличным от скоростного, так как граничные условия для скорости и температуры неодинаковы.

Для решения задачи в дальнейшем понадобится зависимость для теплоотдачи в случае однократного ступенчатого изменения температуры поверхности. Теплоотдача в этом случае будет выглядеть следующим образом [4-6]:

$$Nu_{\text{ступ}} = Nu_{\text{изот}} \Phi_{\text{ступ}}, \quad (6)$$

где  $Nu_{\text{изот}}$  - теплоотдача для изотермичной пластины;  $\Phi_{\text{ступ}}$  - безразмерный множитель, характеризующий влияние начального необогреваемого участка на теплообмен. Причем

$$\Phi_{\text{ступ}} = \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{x} \right)^Z \right]^\Phi, \quad (7)$$

где  $\xi$  - длина необогреваемого участка;  $x$  - координата, подсчитанная от передней кромки пластины ( $x > \xi$ );  $Z$  и  $\Phi$  - константы. Для ламинарного течения значения констант, входящих в (7), составляют:  $Z = 3/4$ ,  $\Phi = -1/3$  [4], и для турбулентного:  $Z = 0.9$ ,  $\Phi = -1/9$  [5,6].

### 3.2. Метод решения

Линейность дифференциального уравнения энергии в системе (5) позволяет использовать принцип суперпозиции для получения решения для теплообмена в случае неизотермичной поверхности путем обобщения решения задачи с начальным необогреваемым участком (ступенчатая неизотермичность). Данный метод, на который обычно ссылаются как на теорию Дюамеля, хорошо описан Эккертом и Дрейком [9]. При решении с помощью метода Дюамеля непрерывное изменение температуры стенки представляется в виде ступенчатого. Выражение для плотности теплового потока в итоге можно записать следующим образом:

$$q = \sum_1^n \alpha_{\text{ступ}}(x, \xi_i) \Delta t_{ci}, \quad (8)$$

где  $\alpha_{\text{ступ}}(x, \xi_i)$  - теплоотдача для случая ступенчатого изменения температуры стенки, причем  $\xi$  - продольная координата, отсчитываемая от координаты скачка температуры, а  $x$  - расстояние от передней кромки пластины до места температурного скачка ( $x > \xi$ ). Непрерывно изменяющуюся температуру стенки можно представить как последовательность бесконечно малых температурных скачков  $dt_c$ , имеющих место на бесконечно близко расположенных интервалах  $d\xi$ . Перейдем в (8) от знака суммы к знаку интеграла, и формула для теплового потока в наиболее общем виде примет вид

$$q = \int_0^x \alpha_{\text{ступ}}(x, \xi) \frac{d(t_c - t_\infty)(\xi)}{d\xi} d\xi + \sum_0^n \alpha_{\text{ступ}}(x, \xi_i) \Delta t_{ci}. \quad (9)$$

Второй член в (9) характеризует изменение теплового потока из-за наличия участков поверхности, где температура стенки меняется скачкообразно. В нашем случае будем рассматривать случай, когда ступенчатое изменение температуры стенки имеет место лишь на передней кромке пластины и затем ее изменение имеет непрерывный характер. Учитывая это обстоятельство и подставляя (6) и (7) в (9), получаем

$$q = \alpha_{\text{изот}} \left\{ - \int_0^x \Phi_{\text{ступ}} \frac{d(t_z - t_c)}{d\xi} d\xi + \Delta t_{c0} \right\}, \quad (10)$$

где  $\Delta t_{c0}$  - скачок температуры стенки на передней кромке, равный  $t'_z - t_{c0}$ .

Используя (10) и применяя закон Ньютона-Рихмана для теплового потока  $q = \alpha(t_z - t_c)$ , можно получить следующее выражение для величины поправочного множителя, учитывающего неизотермичность поверхности теплообмена:

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = \frac{\alpha_{\text{неизот}}}{\alpha_{\text{изот}}} = \frac{- \int_0^x \Phi_{\text{ступ}}(\xi, x) \frac{d(t_z - t_c)}{d\xi} d\xi + \Delta t_{c0}}{t_z - t_c}. \quad (11)$$

Получив выражения для  $(t_z - t_c)$  и  $\Delta t_{c0} = (t'_z - t_{c0})$  из (1) и подставив их в (11), имеем

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = \frac{C_3 \int_0^x \Phi_{\text{ступ}}(\xi, x) e^{C_3 \xi} d\xi + 1}{e^{C_3 x}}. \quad (12)$$

Константа  $C_3$  в (12) берется из (4). Соотношение (12) позволяет произвести количественную оценку влияния неизотермичности поверхности на теплообмен в любой точке поверхности как для ламинарного, так и для турбулентного течения.

Обозначим интеграл в (12)  $\Psi$ :

$$\Psi(x) = \int_0^x \Phi_{\text{ступ}}(\xi, x) e^{C_3 \xi} d\xi = \int_0^x \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{x} \right)^Z \right]^\Phi e^{C_3 \xi} d\xi. \quad (13)$$

Тогда формула для поправочного множителя на неизотермичность поверхности запишется так

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = \frac{C_3 \Psi(x) + 1}{e^{C_3 x}}. \quad (14)$$

### 3.3. Результаты решения

Можно показать, что

$$\Psi(x) = \frac{x}{Z} \left\{ \beta\left(\Phi + 1; \frac{1}{Z}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(C_3 x)^i}{i!} \beta\left(\Phi + 1; \frac{i+1}{Z}\right) \right\}, \quad (15)$$

где  $\beta(k; l) = \int_0^1 \tau^{k-1} (1-\tau)^{l-1} d\tau$  - бета-функция;  $Z$  и

$\Phi$  - константы из пункта 3.4.1. Для ламинарного и турбулентного случаев (см. п. 3.1)

$$\beta_{\text{лам}}\left(\Phi + 1; \frac{1}{Z}\right) = 1,209 \text{ и } \beta_{\text{турб}}\left(\Phi + 1; \frac{1}{Z}\right) = 1,021.$$

Анализируя (14) и (15), можно увидеть, что поправка на неизотермичность поверхности (в случае экспоненциальной неизотермичности) будет функцией  $C_3 x$  и определяться константами  $Z$  и  $\Phi$ , значения которых, в свою очередь, определяются режимом течения горячего теплоносителя. Вид зависимости (14) для ламинарного и турбулентного течения показан на рис. 1 (там же показано сопоставление с результатами численного решения той же задачи при помощи программного комплекса Phoenix).

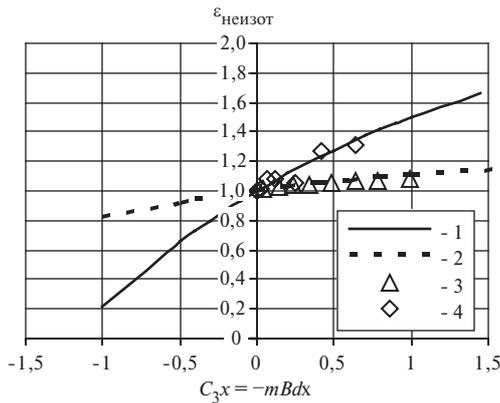


Рис 1. К задаче о теплообмене вдоль неизотермичной пластины (экспоненциальная неизотермичность): 1 - ламинарное движение по (14); 2 - турбулентное движение по (14); 3 - численный расчет по Phoenix для ламинарного движения; 4 - численный расчет по Phoenix для турбулентного течения

На рис. 1 область отрицательных  $C_3 x$  соответствует положительным  $m$  (противоток и прямоток), а область положительных  $C_3 x$  - отрицательным  $m$

(противоток). Видно, что при определенных значениях коэффициента  $C_3$  на удалении от передней кромки неизотермичность может существенно искажать теплоотдачу (как в случае ламинарного, так и в случае турбулентного движения). Причем в области отрицательных  $C_3 x$  этот эффект проявляется сильнее. Из рис. 1 также видно, что степень нарушения аналогии заметно выше при ламинарном движении. Сопоставление на рис. 1 показывает, что результаты вычислений по формуле (14) хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

Опытные данные по экспоненциальной неизотермичности отсутствуют, поэтому сопоставление с результатами экспериментов не представляется возможным. Однако посредством простых преобразований (14) можно получить поправку  $\varepsilon_{\text{неизот}}$  для линейной неизотермичности. Точное аналитическое решение данной задачи для ламинарного случая было получено Эккертом [9] и Петуховым [4] и подтверждено данными экспериментов Эккерта [7]. Аналитическое решение для турбулентного обтекания до сих пор не было получено, однако данный случай был исследован экспериментально в [6, 7, 8].

Формула (14) позволяет путем несложных преобразований получить зависимость для поправочного множителя при линейной неизотермичности поверхности. В этом случае полагаем значение  $C_3$  достаточно малым, что позволяет преобразовать составляющую  $e^{C_3 x}$  в (1) и в (14) к виду  $1 + C_3 x$ . Существенно упрощается зависимость для  $\Psi$ :

$$\Psi(x) = \frac{x \beta\left(\Phi + 1; \frac{1}{Z}\right)}{Z}. \quad (16)$$

Учитывая вышеуказанные допущения и подставляя (16) в (14) получаем следующие формулы для поправочного множителя на неизотермичность для ламинарного и турбулентного случаев:

- лам. движение:

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = \frac{1.612 C_3 x + 1}{1 + C_3 x}; \quad (17)$$

- турб. движение:

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = \frac{1.134 C_3 x + 1}{1 + C_3 x}. \quad (18)$$

Решение получается другим, если принять разницу температур между стенкой и потоком на передней кромке пластины  $t'_e - t_{e0}$  равной нулю:

- лам. движение:

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = 1.162; \quad (19)$$

- турб. движение:

$$\varepsilon_{\text{неизот}} = 1.134. \quad (20)$$

Числа (19) и (20) также являются предельными значениями для (17) и (18). Важно отметить, что формула (17) была ранее аналитически получена Петуховым в [4].

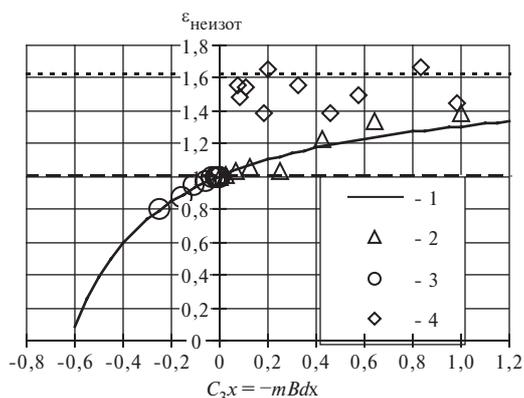


Рис 2. К задаче о теплообмене вдоль неизотермичной пластины (линейная неизотермичность; ламинарное течение): 1 – по (17); 2 – численный расчет по Phoenix для  $C_3=1$ ; 3 – численный расчет по Phoenix для  $C_3=-0.25$ ; 4 – опытные данные [7] (темп. напор на входе отсутствует)

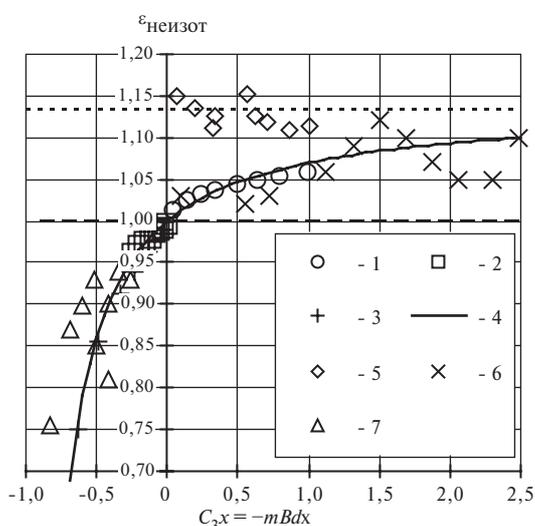


Рис 3. К задаче о теплообмене вдоль неизотермичной пластины (линейная неизотермичность; турбулентное течение): 1 – численный расчет по Phoenix для  $C_3=1$ ; 2 – численный расчет по Phoenix для  $C_3=-0.25$ ; 3 – численный расчет по Phoenix для  $C_3=-1$ ; 4 – расчет по (18); 5 – опытные данные [7] (темп. напор на входе отсутствует); 6 – опытные данные [6]; 7 – опытные данные [8]

Как видно из рис. 2 и 3 результаты подсчета по формулам (17) и (18) достаточно приемлемо согласуются с экспериментальными данными, что косвенно подтверждает правильность полученного нами уравнения (14).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных расчетов показали, что при определенных условиях движения теплоносителя вдоль неизотермичной плоской поверхности теплоотдача может испытывать изменение относительно случая изотермичной пластины. В некоторых случаях это изменение может составлять десятки процентов (см. рис. 1, 2 и 3). Также было показано, что в случае учета неизотермичности теплоотдача поверхности теплообмена будет также опреде-

ляться такими параметрами, как режим течения теплоносителя, схема относительного движения теплоносителей, водяные эквиваленты теплоносителей, а также средний коэффициент теплопередачи (см. (14)). Изменение теплоотдачи в результате неизотермичности поверхности сильнее проявляется при ламинарном режиме, чем при турбулентном, и более характерно для противоточного движения теплоносителей.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $x$  – продольная координата, м;
- $y$  – поперечная координата, м;
- $C_1, C_2$  и  $C_3$  – константы из экспоненциального закона изменения температуры стенки;
- $t_{\Gamma}$  – температура горячего теплоносителя, °С;
- $t'_{\Gamma}$  – температура горячего теплоносителя на входе в теплообменный аппарат, °С;
- $t_c$  – температура поверхности теплообмена, °С;
- $t_{c0}$  – температура поверхности теплообмена на передней кромке, °С;
- $\Delta t_{\text{общ}}$  – температурный напор на входе в теплообменник, °С;
- $W_{\Gamma}$  и  $W_{\chi}$  – водяные эквиваленты для горячего и холодного теплоносителя соответственно, кВт/К;
- $K$  – коэффициент теплопередачи, кВт/(м·К);
- $\alpha_{\Gamma}$  – коэффициент теплоотдачи со стороны горячего теплоносителя, кВт/(м·К);
- $B$  – периметр поперечного сечения поверхности теплообмена, м;
- $Nu$  – число Нусельта;
- $w$  – скорость жидкости, м/с;
- $\beta$  – бета-функция.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. Г.А. Вольперта. М.: Наука, 1974.
2. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982.
3. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975.
4. Петухов Б.С. Теплообмен в движущейся однофазной среде (ламинарный пограничный слой). М.: Изд-во МЭИ, 1993.
5. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — 2-е изд., перераб. М.: Энергоатомиздат, 1985. 320 с.
6. Reynolds W.C., Kays W.M., Kline S.J. A summary of experiments on turbulent heat transfer from a nonisothermal flat plate // Trans. ASME. Ser. C. 1960. Vol. 82. № 4. P. 341 – 348.
7. Eichhorn R., Eckert E. R. G., Anderson A. D. An experimental study of the effects of nonuniform wall temperature on heat transfer in laminar and turbulent axisymmetric flow along a cylinder // Trans. ASME. Ser. C. 1960. Vol. 82. № 4. P. 349 – 359.
8. Леонтьев А. И., Миронов Б. П., Мухин В. А. Влияние граничных условий на закон теплообмена турбулентного пограничного слоя // Инженерно-физический журнал. 1968. Т. 15. № 1. С. 5-11.
9. Эккерт Э. Р. Г., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена: Пер. с англ. / Под ред. А. В. Лыкова. — 2-е изд., перераб. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961.