

И. И. Вигдорovich¹, А. А. Фёдоров²Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова, Москва, Россия(1)
Московский государственный индустриальный университет, Россия(2)**РАССЧЕТ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ В ПРИСТЕННОЙ ОБЛАСТИ
ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СО ВДУВОМ****Аннотация**

Для пристеночной области турбулентного пограничного слоя со вдувом получено условие замыкания в виде универсальной зависимости касательного напряжения от градиента осредненной продольной скорости. Если пренебречь влиянием на эту зависимость поперечной скорости течения, она может быть определена только по профилю скорости вблизи непроницаемой стенки.

Расчитанные на основе такого подхода распределения скорости удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение несжимаемой вязкой жидкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя на гладкой проницаемой поверхности. Скорость вдува или отсоса будем считать направленной по нормали к стенке. В тонкой пристеночной области поперечные градиенты осреднённых параметров много больше продольных, поэтому в первом приближении перенос импульса описывается известным уравнением

$$-\langle u'v' \rangle + \nu \frac{du}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} + v_w u, \quad (1)$$

где τ_w — значение на стенке касательного напряжения, а v_w — поперечной скорости. Уравнение (1) послужит основой для вывода закона.

Уравнение (1) описывает турбулентное течение вдоль бесконечной плоскости, в котором поперечная скорость и давление постоянны, а остальные параметры зависят только от расстояния до плоскости. Для такого течения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= F_1 \left(y, \nu, v_w, \frac{\tau_w}{\rho} \right), \\ \langle u'v' \rangle &= F_2 \left(y, \nu, v_w, \frac{\tau_w}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где F_1 и F_2 — некоторые универсальные функции. Мы, таким образом, предполагаем, что рассматриваемые величины в пристеночной области не зависят от внешних параметров пограничного слоя и полностью определены условиями на стенке и физическими константами жидкости.

Выразим теперь величину τ_w/ρ из первого уравнения (2) и подставим её во второе уравнение. В результате будем иметь

$$\langle u'v' \rangle = G \left(y, \nu, v_w, \frac{du}{dy} \right). \quad (3)$$

Применяя к функциональному соотношению (3) П-теорему, получим

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= - \left(y \frac{du}{dy} \right)^2 S(\text{Re}, \beta), \\ \text{Re} &= \frac{y^2}{\nu} \frac{du}{dy}, \quad \beta = \frac{v_w}{\text{Re}} \frac{dy}{du}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь локальное число Рейнольдса Re есть отношение характерных значений турбулентной и молекулярной вязкостей. Относительно функции S предположим, что она непрерывна при $0 \leq \text{Re} \leq \infty$, $-\infty \leq \beta \leq \infty$, имеет частные производные по всем аргументам внутри этой области и удовлетворяет условию $S(\infty, 0) \neq 0$. Физически это соответствует обычному предположению, согласно которому вязкость существенна лишь в тонком слое вблизи стенки (вязком подслое).

Соотношения (4) представляют собой выражение касательного напряжения через градиент осреднённой скорости. Поскольку влияние скорости вдува или отсоса на эти зависимости по мере удаления от стенки должно убывать, параметр β выбран так, что в знаменателе стоит локальное число Рейнольдса Re .

Перейдём к переменным стенки

$$y_+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad u_+ = u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}, \quad v_+ = v_w \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}.$$

Уравнение (1) с учётом (4) примет вид

$$\begin{aligned} \left(y_+ \frac{du_+}{dy_+} \right)^2 S(\text{Re}, \beta) + \frac{du_+}{dy_+} &= 1 + v_+ u_+, \\ u_+(0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Re} = y_+^2 \frac{du_+}{dy_+}, \quad \beta = \frac{v_+}{\text{Re}} \frac{dy_+}{du_+}. \quad (6)$$

Задача, таким образом, сведена к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения для профиля скорости (5) [1, 2].

2. ЗАКОНЫ ПОДОВИЯ

2.1. Непроницаемая стенка

В случае непроницаемой стенки ($v_+ = 0$) уравнение (5) имеет решение в замкнутом виде

$$u_+ = \int_0^R \frac{d\text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 S(\text{Re}, 0) + \text{Re}}} - \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\sqrt{\text{Re} S(\text{Re}, 0) + 1}},$$

$$y_+ = \sqrt{\text{Re}^2 S(\text{Re}, 0) + \text{Re}}, \quad 0 \leq \text{Re} \leq \infty. \quad (7)$$

Из (7) и условий поставленных на функцию S , следует, что скорость имеет логарифмическую асимптотику во внешней части пристенной области

$$u_+ = \frac{1}{\varkappa} (\ln y_+ + C_0) + O(y_+^{-\alpha}), \quad (8)$$

$$\varkappa = \sqrt{S(\infty, 0)}, \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

В соответствии с экспериментальными данными примем следующие значения постоянных в асимптотическом представлении (8):

$$\varkappa = 0,41, \quad C_0 = 2,05.$$

2.2. Стенка со вдувом

В общем случае ненулевой поперечной скорости на стенке, переходя в (5) к новым переменным Y и w

$$Y = \frac{yv_w}{\nu} = v_+ y_+, \quad w = \frac{2}{v_+} \sqrt{1 + v_+ u_+}, \quad (9)$$

получим уравнение

$$\left(Y \frac{dw}{dY} \right)^2 S(\text{Re}, \beta) + \frac{2}{w} \frac{dw}{dY} = 1, \quad (10)$$

$$w(0) = \frac{2}{v_+}, \quad \text{Re} = \frac{Y^2 w}{2} \frac{dw}{dY}.$$

Замена переменных (9) выбрана так, чтобы уравнение (10) не зависело от параметра v_+ .

Запишем уравнение (10) в виде

$$Y \frac{dw}{dY} \sqrt{S(\text{Re}, \beta) + \frac{1}{\text{Re}}} = 1, \quad (11)$$

$$\frac{dw}{d \ln Y} = \frac{1}{\sqrt{S(\text{Re}, \beta) + 1/\text{Re}}}. \quad (12)$$

Во внешней части пристеночной области локальное число Рейнольдса велико. Величинами порядка $1/\text{Re}$ можно пренебречь. Для совпадения с экспериментальными данными положим

$$S(\text{Re}, \beta) = \varkappa^2,$$

тогда получим

$$w = \frac{1}{\varkappa} \ln Y + C_1(v_+) + O(Y^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad (13)$$

где $C_1(v_+)$ — некоторая функция. Для случая вдува (13), есть асимптотика решения уравнения (5) при $Y \rightarrow \infty$, а для случая отсоса — промежуточная асимптотика, соответствующая внешней части пристеночной области. Возвращаясь в (13) к исходным переменным, получим асимптотическое представление профиля скорости

$$\frac{2}{v_+} (\sqrt{1 + v_+ u_+} - 1) = \frac{1}{\varkappa} [\ln y_+ + C(v_+)] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0. \quad (14)$$

Здесь $C(v_+)$ — некоторая универсальная функция. Соотношение (14) является обобщением логарифмического закона на случай вдува и отсоса для профиля скорости и при $v_+ = 0$ должно совпадать с (8); отсюда

$$C(0) = C_0.$$

Таким образом, основываясь на анализе размерностей и используя уравнения движения, мы получили обобщение хорошо известного логарифмического закона для профиля скорости в турбулентных пристенных течениях на случай наличия вдува или отсоса на стенке.

Из (13) и (14) выразим $C(v_+)$ через $C_1(v_+)$

$$C(v_+) = \ln v_+ - \frac{2\varkappa}{v_+} + \varkappa C_1(v_+). \quad (15)$$

3. РАСЧЕТ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ

Предположим, что функция $S(\text{Re}, \beta)$ не зависит от параметра β . Тогда она может быть определена по экспериментальным данным для непроницаемой пластины. Используем для этого эмпирическую формулу [3]

$$y_+ = A(u_+) = u_+ + e^{-C_0} [e^{\varkappa u_+} - 1 - \varkappa u_+ \frac{(\varkappa u_+)^2}{2} - \frac{(\varkappa u_+)^3}{6} - \frac{(\varkappa u_+)^4}{24}]. \quad (16)$$

Домножим теперь уравнение (11) на wY слева и справа. В результате будем иметь

$$wY = wY^2 \frac{dw}{dY} \sqrt{S(\text{Re}, 0) + \frac{1}{\text{Re}}}$$

$$wY = 2 \text{Re} \sqrt{S(\text{Re}, 0) + \frac{1}{\text{Re}}} \equiv \Phi(\text{Re}).$$

Из последнего равенства выразим Y и dY и подставим их в уравнение (11)

$$2 \text{Re} \Phi'(\text{Re}) d\text{Re} = \left(\Phi^2(\text{Re}) + \frac{2 \text{Re} \Phi(\text{Re})}{w} \right) dw. \quad (17)$$

С другой стороны $y_+ = A(u_+)$. Полагая в (5) $v_+ = 0$ получим уравнение

$$y_+ \frac{du_+}{dy_+} \sqrt{S(\text{Re}, 0) + 1/\text{Re}} = 1, \quad \text{Re} = y_+^2 \frac{du_+}{dy_+},$$

домножая которое, слева и справа на y_+ заключаем, что

$$y_+ = \frac{1}{2} \Phi(\text{Re}), \quad \Phi(\text{Re}) = 2y_+ = 2A(u_+).$$

Учитывая, что

$$\text{Re} = \frac{y_+^2}{\frac{dy_+}{du_+}},$$

выразим Re через $A(u_+)$

$$\text{Re} = \frac{A^2(u_+)}{A'(u_+)}.$$

Используя полученные выражения для Re и $\Phi(\text{Re})$ через $A(u_+)$, и замечая, что $\Phi'(\text{Re})d\text{Re} = 2A'(u_+)du_+$, преобразуем (17) к виду

$$\frac{dw}{du_+} = \frac{A'(u_+)w}{A'(u_+)w + A(u_+)}, \quad w(0) = \frac{2}{v_+}. \quad (18)$$

Исследуем асимптотику уравнения (18).

$$\left. \frac{dw}{du_+} \right|_{u_+=0} = \frac{A'(0) \frac{2}{v_+}}{A'(0) \frac{2}{v_+} + A(0)} = \frac{1 \frac{2}{v_+}}{1 \frac{2}{v_+} + 0} = 1,$$

следовательно, любая интегральная кривая уравнения (18) пересекает ось Ow под углом $\frac{\pi}{4}$.

$$\left. \frac{dw}{du_+} \right|_{u_+ \rightarrow \infty} = \lim_{u_+ \rightarrow \infty} \frac{A'(u_+)w}{A'(u_+)w + A(u_+)} = \frac{1}{\varkappa}.$$

Откуда заключаем, что

$$\left. \frac{dw}{du_+} \right|_{u_+ \rightarrow \infty} = \frac{\varkappa w}{\varkappa w + 1},$$

а это, в свою очередь, означает, что

$$\left. \frac{dw}{du_+} \right|_{u_+ \rightarrow \infty} = 1, \quad w \rightarrow \infty$$

т. е. интегральные кривые уравнения (18) при неограниченном возрастании u_+ и w асимптотически приближаются к некоторой прямой $w = u_+ + D$.

Уравнение (18) решалось численно.

Из (15) получим

$$C_0 - C(v_+) = C_0 - \ln v_+ + \frac{2\varkappa}{v_+} - \varkappa C_1(v_+), \quad (19)$$

таким образом, для определения величины $C_0 - C(v_+)$, потребуется знание функции $C_1(v_+)$. Заметим, что при $v_+ \rightarrow 0$ и вся разность стремиться к нулю, т. е. с уменьшением поперечного вдува, очевидно, стирается различие между асимптотическим поведением профилей скорости.

Для определения $C_1(v_+)$, рассмотрим случай отсутствия поперечной скорости. Тогда

$$u_+ = \frac{1}{\varkappa} (\ln y_+ + C_0)$$

и, следовательно,

$$y_+ = A(u_+) = e^{\varkappa u_+ - C_0}.$$

В этом случае $A'(u_+) = \varkappa A(u_+)$ и уравнение (18) преобразуется к виду

$(1 + \frac{1}{\varkappa w}) dw = du_+$, которое легко интегрируется

$$w + \frac{1}{\varkappa} \ln w = u_+ + D(v_+). \quad (20)$$

С другой стороны, имеем соотношение

$$Y = \frac{\Phi(\text{Re})}{w} = \frac{2A(u_+)}{w} = \frac{2e^{\varkappa u_+ - C_0}}{w},$$

подставляя в которое u_+ выраженное из (20), получим $\frac{Y}{2} = e^{\varkappa w - \varkappa D(v_+) - C_0}$, прологарифмировав которое получим

$$w = \frac{1}{\varkappa} \ln Y + \left[-\frac{1}{\varkappa} \ln 2 + D(v_+) + \frac{C_0}{\varkappa} \right].$$

Сравнивая последнее равенство с (13) заключаем, что

$$\varkappa C_1(v_+) = -\ln 2 + \varkappa D(v_+) + C_0. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19), будем иметь

$$C_0 - C(v_+) = -\ln \frac{2}{v_+} + \frac{2\varkappa}{v_+} - \varkappa D(v_+). \quad (22)$$

Для нахождения $D(v_+)$ будем решать уравнение (18) с начальным условием $w(0) = \frac{2}{v_+}$ и определять $D(v_+)$ из соотношения (20). Следует отметить, что определять $D(v_+)$ по формуле (20) можно только для достаточно больших u_+ и w — когда кривая $w = w(u_+)$ выходит на некоторую асимптоту $w(u_+) = u_+ + D$. Заметим, что начиная с некоторого значения u_+ , величина $D(u_+)$ практически не меняется.

Зная величину $D(v_+)$ легко определить значения разности $C_0 - C(v_+)$.

На рис. 1 представлена зависимость $C_0 - C(v_+)$ от v_+ . Там же приведены экспериментальные [4] и расчёты [5, 6] данные.

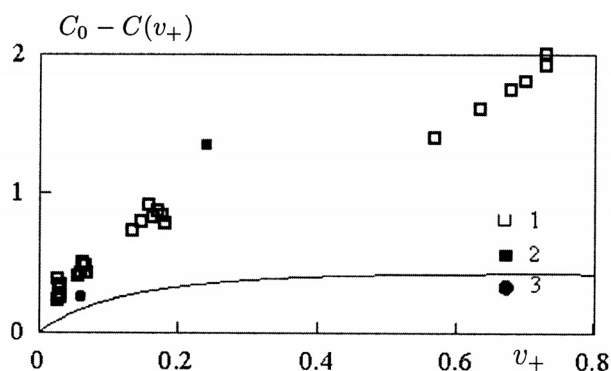


Рис. 1: Функция $C(v_+)$ по результатам расчета и экспериментальным данным: 1 – 3 данные [3 – 5] соответственно.

Соответствие расчетной кривой на рис. 1 и экспериментальных данных можно признать удовлетворительным при малых значениях безразмерной скорости вдува v_+ . При величине безразмерной скорости v_+ , соответствующей сильному вдуву, значения универсальной функции $C(v_+)$, полученные расчетным путем и при обработке экспериментальных данных, различаются существенно.

Список литературы

1. Вигдорович И. И. Законы подобия для скорости, температуры и компонент тензора Рейнольдса в пристеночной области турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности. // ЖЭТФ 2004. Т. 126. Вып. 5(11). С. 1180–1191.
2. Вигдорович И. И. Законы подобия для распределения скорости и температуры в пристеночной области турбулентного пограничного слоя со вдувом и отсосом. // Докл. РАН 2003. Т. 392. № 3. С. 340–345.
3. Spalding D. B. A single formula for the law of the wall. // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1961. V.28. № 3. P.455 – 458.
4. Andersen P. S., Kays W. M. and Moffart R. J. Rep. HMT-15. // Stanford Univ. 1972.
5. Sumitani Y. and Kasagi N. Direct numerical simulation of turbulent transport with uniform wall injection and suction. // AIAA J.33. 1995. P. 1220 – 1228.
6. Никитин Н. В. Павельев А. А. Турбулентные течения в канале с проницаемыми стенками. Результаты прямого численного моделирования и трехпараметрической модели. // Изв. Академии наук. МЖГ. 1998. № 6. С. 18–26.