УДК 536.25

О. А. Сидорова

Воронежский государственный педагогический университет, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОГИБЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ В РЕЗУЛЬТАТЕ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

АННОТАЦИЯ

В предлагаемой работе строится математическая модель задачи о прогибе тонкой пластины, пересекающей прямоугольную область, подверженной тепловому воздействию среды внутри емкости. Проведен компьютерный эксперимент для идентификации модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким использованием упругих металлических конструкций в различных областях деятельности человека, в частности в строительстве, машиностроении, микроэлектронике и др., а также с постоянно развивающейся мощностью вычислительной техники, появляется возможность их компьютерного исследования, прогнозирования устойчивости, надежности и долговечности данных конструкций в результате эксплуатации. Поэтому методы исследования подобных задач с использованием компьютерных возможностей привлекают все большее внимание[1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что внутри области с прямоугольным поперечным сечением расположена тонкая пластина, концы которой в течение всего времени эксперимента остаются неподвижными.

Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость z = 0 была серединной.

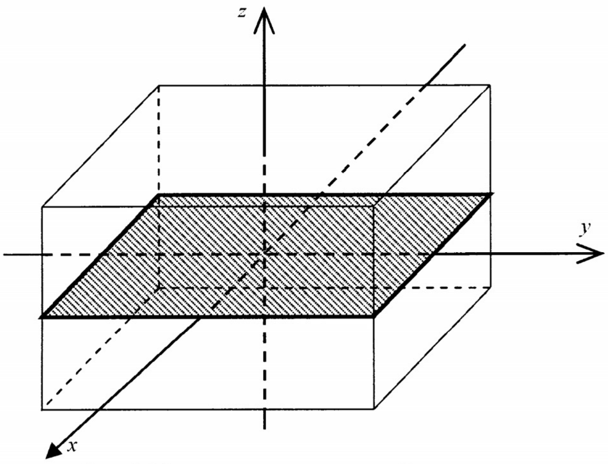

Рис. 1 Модель рассматриваемой установки.

Рассмотрим малые прогибы пластины, ограниченной стенками параллелепипеда и лежащей в плоскости x0y с центром в начале координат (рис. 1). В течение времени t боковые стенки области испытывают тепловое воздействие, прямо пропорциональное времени t. В начальный момент времени пластина неподвижна. Температурное поле внутри области известно. Верхняя и нижняя стенки области теплоизолированы. Требуется рассчитать смещение пластины от положения равновесия в результате теплового и гравитационного воздействий.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

В качестве основного уравнения для стационарных прогибов пластины постоянной толщины выступает уравнение Софи Жермен:

$$D\Delta\Delta W = q - \Delta M_T\,, \tag{1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, q — $q(x,\ y)$ — нагрузка, а $M_т$ — изгибающий момент, обусловленный температурными воздействиями. Для $M_т$ имеем представление [2]:

$$M_T = 2\mu\alpha \int\limits_{-h/2}^{h/2} T(x,y,z)z\,dz \tag{2}$$

При этом температурное поле определяется из решения соответствующего уравнения теплопроводности, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

где a- коэффициент температуропроводности.

Начальные и граничные условия для уравнения (3) имеют вид:

- температурное поле в начальный момент времени примем равное нулю, т.е.

$$T(x,y,z,0) = 0\,; \tag{4}$$

- температурные поля на границах области прямо пропорциональны времени t, т.е.

$$T(0,y,z,t) = T(a,y,z,t) = T(x,0,z,t) = T(x,b,z,t) = t\,; \tag{5}$$

- верхняя и нижняя стенки области теплоизолированы, т.е.

$$\frac{\partial T\left(x,y,-\frac{h}{2},t\right)}{\partial z} = \frac{\partial T\left(x,y,\frac{h}{2},t\right)}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

.

Влияние инерционных сил приводят к следующему уточнению уравнения (1):

$$\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -D\Delta\Delta W - \Delta M_T + q\,, \tag{7}$$

которое представляет собой нестационарное уравнение, определяющее прогибы пластины.

Начальные и граничные условия для уравнения (7) имеют вид:

- в начальный момент времени смещение и скорость смещения пластины равны нулю, т.е.

$$W(x,y,0) = 0\,; \tag{8}$$

$$\frac{\partial W(x,y,0)}{\partial t} = 0\,; \tag{9}$$

- на внешней границе Г пластины имеют место следующие условия жесткого закрепления:

$$\left.\frac{\partial W(x,y,t)}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = W(x,y,t)\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = 0\,. \tag{10}$$

Таким образом, имеем задачу, которая описывается системой уравнений (2)-(10), представляющих собой математическую модель исследуемого физического процесса.

4. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ

Аппроксимация задачи выполняется на равномерной сетке с заданным шагом Δx по оси Ox, Δy по оси Oy и Δz по оси Oz.

Решение системы дифференциальных уравнений выполняется методом конечных разностей. Для этого строится система разностных уравнений:

$$\frac{T_{ijl}^{k+1}-T_{ijl}^{k}}{\Delta t} = a\left(\begin{array}{l}\dfrac{T_{i+1jl}^{k}-2T_{ijl}^{k}+T_{i-1jl}^{k}}{(\Delta x)^2}+\\ +\dfrac{T_{ij+1l}^{k}-2T_{ijl}^{k}+T_{ij-1l}^{k}}{(\Delta y)^2}+\\ +\dfrac{T_{ijl+1}^{k}-2T_{ijl}^{k}+T_{ijl-1}^{k}}{(\Delta z)^2}\end{array}\right), \tag{11}$$

где $i = 1..n-1, \quad y = 1..n-1 \quad l = 1..m-1$

$$T_{0jl}^{k} = T_{njl}^{k} = T_{i0l}^{k} = T_{inl}^{k} = t\,, \tag{12}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n \quad l = 0..m$

$$\frac{T_{ij0}^{k}-T_{ij1}^{k}}{\Delta z} = 0\,, \tag{13}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n$

$$\frac{T_{ijm}^{k}-T_{ijm-1}^{k}}{\Delta z} = 0\,, \tag{14}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n$

$$T_{ijl}^{0} = 0\,, \tag{15}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n \quad l = 0..m$

$$\rho h\frac{W_{ij}^{k+1}-2W_{ij}^{k}+W_{ij}^{k-1}}{(\Delta t)^2} =$$

$$= -D\left[\begin{array}{l}\dfrac{W_{i+2j}^{k}-4W_{i+1j}^{k}+6W_{ij}^{k}-4W_{i-1j}^{k}+W_{i-2j}^{k}}{(\Delta x)^4}+\\ +\dfrac{W_{ij+2}^{k}-4W_{ij+1}^{k}+6W_{ij}^{k}-4W_{ij-1}^{k}+W_{ij-2}^{k}}{(\Delta y)^4}+\\ +2\dfrac{W_{i+1j+1}^{k}-2W_{i+1j}^{k}+W_{i+1j-1}^{k}}{(\Delta x\Delta y)^2}-\\ -4\dfrac{W_{ij+1}^{k}-2W_{ij}^{k}+W_{ij-1}^{k}}{(\Delta x\Delta y)^2}+\\ +2\dfrac{W_{i-1j+1}^{k}-2W_{i-1j}^{k}+W_{i-1j-1}^{k}}{(\Delta x\Delta y)^2}\end{array}\right]-$$

$$-\left(\begin{array}{l}\dfrac{M_{T\,i+1j}-2M_{T\,ij}+M_{T\,i-1j}}{(\Delta x)^2}+\\ +\dfrac{M_{T\,ij+1}-2M_{T\,ij}+M_{T\,ij-1}}{(\Delta y)^2}\end{array}\right)+q \quad, \tag{16}$$

где $i = 2..n-2, \quad y = 2..n-2$, q - нагрузка на единицу площади пластины.

$$W_{0j}^{k} = W_{nj}^{k} = W_{i0}^{k} = W_{in}^{k} = 0\,, \tag{17}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n$

$$\frac{W_{0j}^{k}-W_{1j}^{k}}{\Delta x} = \frac{W_{nj}^{k}-W_{n-1j}^{k}}{\Delta x} = \frac{W_{i0}^{k}-W_{i1}^{k}}{\Delta y} = \frac{W_{in-1}^{k}-W_{in}^{k}}{\Delta y} = 0, \tag{18}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n$

$$\frac{W_{ij}^{1}-W_{ij}^{0}}{\Delta t} = 0\,, \tag{19}$$

где $i = 0..n, \quad y = 0..n$.

5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Программирование задачи и расчеты выполнялись при следующих значениях параметров:

- длина пластины b = 0.5 м;
- ширина пластины a = 0.5 м;
- высота области 0.04 м;
- $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.05$, $\Delta z = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$.

Исследуемая область испытывает температурное воздействие в течение $t_{\max}$. Среда внутри области воздушная, материал пластины – алюминий.

На каждом шаге по времени Δt выполняются следующие расчеты:

1) вычисляется температурное поле во всей области;

2) вычисляется смещение в каждой точке пластины, вызванное данными температурными полями.

6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

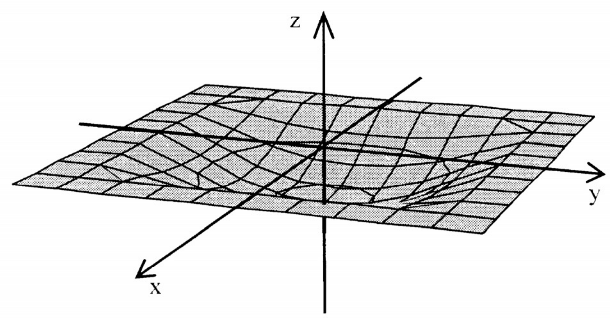

Рис. 2. Смещение пластины при $t = t_{\max}$

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что максимальное отклонение пластины от положения равновесия происходит в начале координат. При $t = t_{\max}$ отклонение равно 10^{-4}м (рис. 2).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение такого рода задач имеет большое практическое значение, в частности, для авиационной промышленности, а также для определения надежности микроэлектронной аппаратуры. Для устранения и предупреждения отказов на этапе проектирования необходим анализ напряженно-деформированного состояния в элементах ИС, возникающего вследствие тепловых или механических воздействий.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

T – температура;
W – смещение пластины;
D — цилиндрическая жесткость, дин·м;
q — нагрузка;
$M_т$ — изгибающий момент, обусловленный температурными воздействиями;
а- коэффициент температуропроводности, м^2/сек;
b - длина пластины, м;
a - ширина пластины, м;
h - высота области, м;
$Г$ – внешняя граница области;
ρ – плотность, кг/м^3;
t – время, с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полякова А. Л. Деформация полупроводников и полупроводниковых приборов. – М.: Энергия, 1979. – 168 с.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.