

Е.И. Некрасова¹, А.К. Некрасов², Л.П. Холтанов³

Электростальский политехнический институт (филиал МИСИС), Россия (1)
 Московский государственный университет инженерной экологии, Россия (2)
 Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Россия (3)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

АННОТАЦИЯ

Рассматривается движение гетерогенной среды с тяжелыми монодисперсными сферическими частицами в квадратной полости при неизотермической свободной конвекции несущей среды. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса для вязкой, несжимаемой среды в приближении Буссинеска. Влияние дисперсной фазы на несущий поток не учитывалось. Векторное уравнение движения дисперсных частиц в лагранжевой системе координат преобразуется в систему двух скалярных уравнений для определения модуля относительной скорости частицы и ее направления. Полученная система решена совместно с уравнениями движения сплошной среды в эйлеровой системе координат.

1. ВВЕДЕНИЕ

К вопросу моделирования динамики многофазных сред можно подойти с помощью двух подходов.

В первом из них основным объектом исследования является сплошная среда, а дисперсная фаза учитывается как дополнительное явление. Математическое моделирование среды основывается на уравнениях типа Навье-Стокса, в которых влияние дисперсных включений учитывается через концентрацию фаз, сил их взаимодействия и так далее. В этом направлении имеются существенные достижения [1].

Во втором подходе расчет движения частицы базируется на уравнении динамики материальной точки, записанном в лагранжевой системе координат [2]. В этом случае влияние сплошной среды определяется через коэффициент сопротивления частицы в неоднородной среде, определяемый из опыта.

В реальном случае, если плотность частицы и среды существенно отличаются между собой, траектория частицы не может совпадать с траекторией средней скорости основного потока, поскольку локальные компоненты тензора напряжений для двумерного вихревого потока, влияющие на траекторию частицы, неоднородны. К тому же такой подход не может воспроизвести полную картину траектории частицы в вихревом потоке. В этом состоит существенный недостаток данного подхода.

Достаточно интересным является комбинация этих двух подходов, когда векторное уравнение движения дисперсной частицы в лагранжевой системе координат решается совместно с уравнением движения сплошной среды в эйлеровой системе координат [3].

Результаты математического моделирования, приводимые в данной работе, применимы к смесям с малой объемной концентрацией однородной тяжелой дисперсной фазы, что позволило воспользоваться известными формулами, полученными для обтекания одиночной сферы [1, 2].

Для нахождения поля скорости однородных дисперсных частиц в данной работе использован метод, подробно изложенный в работе [3].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания полей скорости и температуры для вязкой, несжимаемой несущей фазы применена система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска:

- уравнение движения

$$\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t} + (\bar{V}_1 \cdot \nabla) \bar{V}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \bar{V}_1 + g\beta_T \vartheta; \quad (1)$$

- уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{V}_1 = 0; \quad (2)$$

- уравнение энергии

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\bar{V}_1 \cdot \nabla) \vartheta \right] = \lambda \Delta \vartheta. \quad (3)$$

Из решения этой системы уравнений, с соответствующими краевыми условиями, получается поле скоростей для несущей фазы \bar{V}_1 .

Для определения скорости дисперсной частицы \bar{V}_2 согласно [3] совместно с системой (1)–(3) должно решаться уравнение движения частицы, записанное в лагранжевой системе координат

$$\frac{d\bar{V}_2}{dt} = -kw^2 \bar{e} + \bar{F}, \quad (4)$$

где $k = 0.75c_{p1}/(\rho_2 d)$; \bar{e} — единичный вектор направления относительной скорости частицы $\bar{V}_{отн}$; w — модуль относительной скорости частицы. Вектор ускорения массовых сил \bar{F} определяется суммой векторов внешней силы и подъемной силы Архимеда.

Коэффициент сопротивления для одиночной сферической частицы в движущейся среде при числах Рейнольдса $Re = wd/\nu < 1$ для местной относительной скорости определяется по соотношению [1]

$$C = 24 / Re.$$

Скорость дисперсных частиц представим в виде суммы скорости сплошной фазы и относительной скорости $\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{\text{отн}}$. Компоненты скорости сплошной фазы для двумерного случая обозначим через (U, V) , а относительную скорость выразим через модуль относительной скорости $w = |\vec{V}_{\text{отн}}|$ и угол α

$$\vec{V}_{\text{отн}} = (w \cos \alpha, w \sin \alpha) = w \vec{e}.$$

Угол α равен значению угла поворота от орта \vec{i} координаты x_1 до вектора \vec{e} ,

В уравнении движения частицы (4) учитывается скорость движения сплошной среды в той же точке.

В работе [3] показано, что вместо векторного уравнения (4), для вычисления поля скорости частиц, может быть получена система из двух скалярных уравнений с двумя неизвестными w и α :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & -kw^2 - (p_1 + E_1 - F_1) \cos \alpha - \\ & - (p_2 + E_2 - F_2) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & (p_1 + E_1 - F_1) \frac{\sin \alpha}{w} - \\ & - (p_2 + E_2 - F_2) \frac{\cos \alpha}{w}. \end{aligned} \quad (6)$$

В декартовой системе координат компоненты p_i, E_i, F_i уравнений (5)—(6) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} p_1 = & U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y}, \quad p_2 = U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y}; \\ E_1 = & w \left(\cos \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial U}{\partial y} \right); \\ E_2 = & w \left(\cos \alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial V}{\partial y} \right); \\ F_1 = & g \left(1 - \frac{\rho_1^o}{\rho_2^o} \right) \sin \varphi, \quad F_2 = -g \left(1 - \frac{\rho_1^o}{\rho_2^o} \right) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Полученные уравнения содержат компоненты поля скоростей несущей фазы U, V и его дифференциальных характеристик $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$. Поэтому для того, чтобы определить движение дисперсной частицы в потоке несжимаемой жидкости необходимо совместно решить систему (5)—(6) с системой уравнений движения несущей среды (1)—(3).

Изменения координат дисперсной частицы за время Δt могут быть определены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) = & U \Delta t + w \cos \alpha \Delta t, \\ y(t + \Delta t) - y(t) = & V \Delta t + w \sin \alpha \Delta t. \end{aligned}$$

Отсюда, при $\Delta t \rightarrow 0$ получим:

$$\frac{dx}{dt} = U + w \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = V + w \sin \alpha.$$

При известных начальных координатах частиц и найденных значениях скоростей несущей фазы (U, V) , модуля w и угла направления α для вектора относительной скорости частицы последние уравнения позволяют рассчитать траекторию частиц по времени.

3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Решение систем уравнений (1)—(3) и (5)—(6) с соответствующими краевыми условиями получено численно конечно-разностным методом.

Система уравнений (1)—(3) решается в двумерной постановке в переменных вихрь - функция тока.

Предварительно, введя масштабы для искомых величин и независимых переменных, все уравнения и дополнительные краевые условия приводились к безразмерному виду.

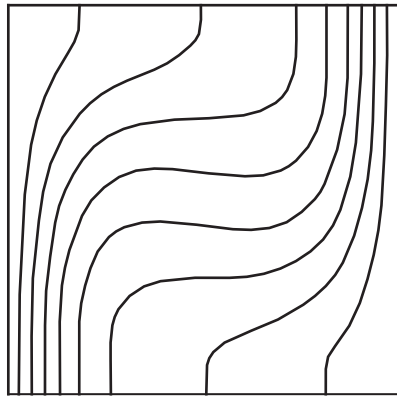
В расчетной области вводилась равномерная сетка узлов по пространству и исходная система уравнений в переменных вихрь-функция тока заменой дифференциальных операторов разностными заменялась локально одномерной разностной схемой. Для аппроксимации нелинейного конвективного члена в уравнении вихря использовалась монотонная аппроксимация Самарского.

Полученные таким образом системы трехдиагональных разностных уравнений для вихря, функции тока и температуры решались итерационным методом переменных направлений с использованием метода прогонки [4,5].

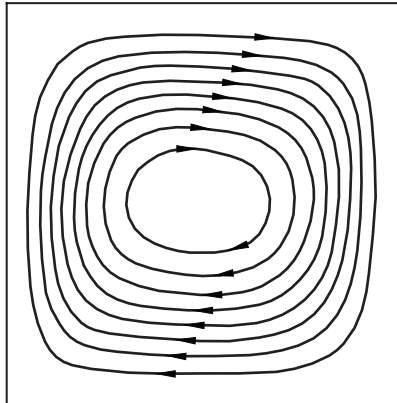
После вычисления скоростей U и V для несущей фазы на каждой итерации по времени решалась система уравнений (5)—(6) и определялись величины модуля относительной скорости движения частицы w и угол направления вектора относительной скорости α .

Для решения конечно-разностным методом, сформулированной в п. 2 задачи, на алгоритмическом языке Фортран-90 в среде MS Visual Fortran была написана программа для ЭВМ.

Для проверки правильности расчета скорости несущей среды, разработанная программа протестирована на задачах, решения которых для различных чисел Релея Ra и Прандтля Pr приведены в книге [5]. На рис. 1 приведены результаты расчета задачи о тепловой гравитационной конвекции в квадратной полости при нагреваемой левой, охлаждаемой правой и изотермическими верхней и нижней стенками. Получена хорошая сходимость, подтверждающая правильность работы разработанной программы.



a)



б)

Рис 1. Изотермы (а) и линии тока (б) для стационарного режима при $Ra = 10^4$, $Pr = 0.71$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрена квадратная полость с неподвижными стенками и заданным распределением температуры на них.

Проведена серия расчетов при различных значениях чисел Грасгофа, Прандтля для несущей среды и различных диаметров d дисперсных частиц различной плотности ρ_2 .

На рис. 2 и 3 приведены векторные диаграммы для полей скорости движения несущей и дисперсной фаз, полученные для установившихся режимов движения гетерогенной среды. На рисунках линии со стрелками соответствуют скоростям частиц, а линии без стрелок соответствуют скоростям несущей среды.

Как показал анализ полученных результатов, интенсивные изменения модуля относительной скорости w и угла α происходят в начальные моменты времени движения. Этот участок соответствует режиму ускоренного движения частицы. Затем, когда сила сопротивления среды уравнивается массовыми силами, функции w и α выходят на асимптоту. При этом частица движется равномерно, с постоянной скоростью. Предельные значения этих функций зависят от множества параметров.

Как и ожидалось, при уменьшении диаметра частицы наблюдаемые параметры w и α , а также интенсивность осаждения, уменьшаются. Поскольку дифференциальные характеристики сплошной среды в объеме полости изменяются, значения угла осаждения и относительной скорости в начальные моменты времени зависят от начальной координаты частицы.

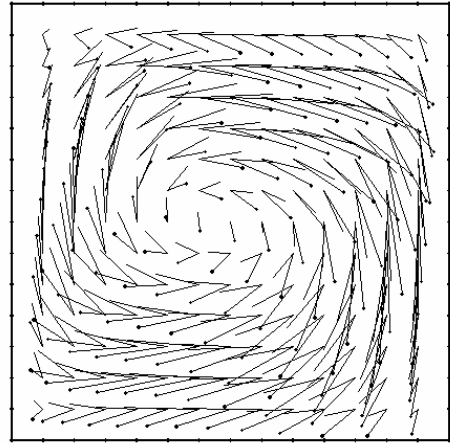


Рис. 2. Векторная диаграмма скоростей движения несущей фазы и дисперсных частиц $Ra = 10^4$, $d = 80$ мкм, $Pr = 0.71$

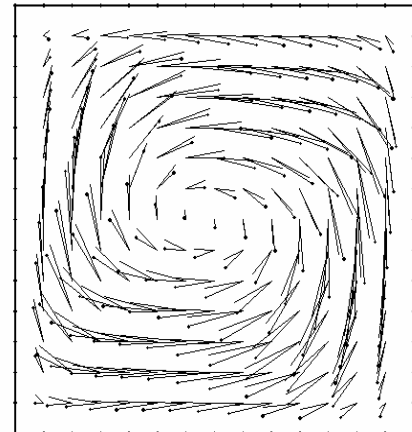


Рис. 3. Векторная диаграмма скоростей движения несущей фазы и дисперсных частиц $Ra = 10^4$, $d = 40$ мкм, $Pr = 0.71$

Для частиц с одинаковыми диаметрами и разными начальными координатами эти характеристики со временем выходят на общую асимптоту.

В зависимости от отношения плотностей сплошной фазы и дисперсных включений может наблюдаться как осаждение, так и всплытие частиц. Когда $\rho_1^0/\rho_2^0 < 1$, уменьшение этого отношения вызывает рост относительной скорости и угла осаждения частицы. При этом время осаждения до поверхности течения уменьшается. В случае $\rho_1^0/\rho_2^0 > 1$ при уменьшении отношения плотностей угол α и время всплытия частицы растут, а предельное значение w падает. Время всплытия или осаждения зависит от начального местоположения частицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вышеприведенные результаты численных расчетов качественно согласуются с реальной картиной течения. Данный подход может быть успешно применен для расчета динамики дисперсных частиц при моделировании различных гидромеханических процессов с гетерогенными рабочими средами.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\vec{V}(U, V)$ — вектор скорости движения и его компоненты, м/с;

p — давление, Па;

t — время, с;

ν — коэффициент кинематической вязкости, м²/с;

$\vec{e}(e_1, e_2)$ — единичный вектор направления относительной скорости частицы и его компоненты;

g — ускорение свободного падения, м/с²;

β_T — коэффициент термического расширения, 1/К;

ϑ — относительная температура, К;

ρ — плотность, кг/м³;

L — размер полости, м;

c_p — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);

λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

d — диаметр дисперсной частицы, мкм;

C — коэффициент сопротивления сферической частицы;

φ — угол наклона, рад;

$\vec{F}(F_1, F_2)$ — вектор ускорения массовых сил и его компоненты;

$Pr = \nu/a$ — критерий Прандтля;

$Ga = gL^3/\nu^2$ — критерий Галилея;

$Gr = Ga \cdot \vartheta \beta_T$ — критерий Грасгофа;

$Ra = Gr Pr$ — критерий Рэлея.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нигматулин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. **Райст П.** Аэрозоли. М.: Мир, 1987. 280 с.
3. **Холпанов Л.П., Ибятов Р.И.** Математическое моделирование динамики дисперсной фазы // Теор. основы хим. технол. Т. 39. № 2. С. 206—215.
4. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
5. **Математическое** моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.И. Везуб и др. М.: Наука, 1987. 272 с.