

КОНВЕКЦИЯ И ТЕПЛООБМЕН В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

АННОТАЦИЯ

Методом конечных разностей в приближении Буссинеска исследованы структуры конвективной фильтрации и характер теплопередачи в горизонтальном цилиндрическом слое с однородным внутренним тепловыделением. Использовались модели насыщенной пористой среды Дарси и Форцгеймера. На поверхности внутреннего цилиндра рассматривались два вида тепловых граничных условий: а) изотермическая граница; б) граница адиабатическая. На внешней цилиндрической поверхности выполнялось ньютоновское условие теплоотдачи. Обнаружены как симметричные (относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндров), так и асимметричные решения уравнений конвективной фильтрации. Исследовано их возникновение, области существования и устойчивость для характерных значений параметров задачи. Представлены графики зависимостей теплоток через границы слоя от числа Грасгофа. Некоторые расчеты выполнены в трехмерной постановке

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение конвективных явлений в пористых средах представляет интерес для решения как инженерных, так и научных проблем. Наиболее полный обзор экспериментальных и теоретических работ представлен в [1]. Теоретическое изучение проводилось, как правило, на основе модели Дарси, справедливой для достаточно малой скорости фильтрации. Разнообразие природных и искусственных пористых материалов обуславливает использование разных моделей пористой среды. Если скорость фильтрации не мала (число Рейнольдса, определенное по размеру поры, больше единицы), часто используют модель Форцгеймера, в которой уравнение переноса импульса имеет слагаемое, квадратичное по скорости фильтрации жидкости. Как предельный случай она содержит и модель Дарси.

С точки зрения технических приложений, особенно интересным является изучение конвективной фильтрации и теплообмена в средах с внутренним тепловыделением. В немногочисленных работах по этой проблеме рассматривались в основном условия возникновения конвекции в горизонтальном плоском слое. Исследования конвекции в замкнутых областях насыщенной пористой среды с внутренними источниками тепла практически не проводились. Отметим работу [2], в которой численно изучалась двумерная конвекция в горизонтальном цилиндрическом слое пористой среды Дарси с границами одинаковой температуры и однородным внутренним тепловыделением. Решение уравнений конвекции

проводилось только для половины полости с наложением условий симметрии относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндров. Вычисления показали, что в каждой половине слоя возникают два противоположно вращающихся серповидных вихря, примыкающих к внутренней и внешней поверхностям слоя. Основное внимание уделялось установлению распределений температуры и характера теплопередачи. Конвективные движения с нарушенной симметрией в этом случае существовать не могут. В то же время из результатов численных расчетов авторов [3,4] известно, что для горизонтального цилиндрического слоя насыщенной пористой среды с границами, имеющими постоянные, но неодинаковые значения температуры, реализуются и асимметричные решения уравнений конвективной фильтрации. Распределения плотности теплового потока на поверхностях цилиндров для указанных режимов конвекции существенно различны.

Целью настоящей работы является исследование условий возникновения, устойчивости, особенностей теплообмена как симметричных, так и асимметричных конвективных движений в слое насыщенной пористой среды с однородным внутренним тепловыделением.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слой пористой среды, ограниченный твердыми цилиндрическими поверхностями с радиусами R_1 и R_2 , в котором происходит внутреннее тепловыделение с удельной мощностью Q . Слой заполнен вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью $\rho_{ж}$ и теплоемкостью $(c_p)_{ж}$. Пористый материал слоя имеет коэффициент пористости ϕ и проницаемость K .

На поверхности внутреннего цилиндра рассматриваются два типа тепловых граничных условий: а) изотермическая граница; б) граница адиабатическая. На внешней цилиндрической поверхности выполняется ньютоновское условие теплоотдачи:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T - T_a).$$

Здесь k — коэффициент теплопроводности среды; α — коэффициент теплоотдачи поверхности; T_a — температура окружающей среды, которую удобно выбрать за начало отсчета температуры.

Уравнения конвективной фильтрации жидкости в приближении Буссинеска для среды Форцгеймера имеют вид [1]:

$$\text{Da}\varphi^{-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla p - \bar{v} - c_F \text{Da}^{1/2} |\bar{v}| \bar{v} + \text{Gr} T \bar{\gamma}; \quad (1)$$

$$\text{div } \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T - \frac{1}{b} \bar{v} \nabla T + \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (2)$$

В системе уравнений (1), (2) использованы общепринятые обозначения скорости фильтрации \bar{v} , давления p и температуры T . В качестве единиц измерения расстояния, времени, а также \bar{v} , T и p выбраны соответственно R_2 , R_2^2/ν , ν/R_2 , QR_2^2/κ , $\rho_{\text{ж}} \nu^2/K$, где ν — вязкость жидкости, а $\rho_{\text{ж}}$ — ее плотность.

Уравнения содержат несколько безразмерных параметров — число Грасгофа Gr , число Прандтля Pr , параметр Дарси Da , отношение радиусов цилиндров R и параметр b , представляющий отношение теплоемкостей среды и жидкости:

$$\text{Gr} = \frac{g\beta QR_2^3 K}{\nu^2 \kappa}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi_{\text{ср}}};$$

$$\text{Da} = \frac{K}{R_2^2}, \quad R = \frac{R_1}{R_2}, \quad b = \frac{(\rho c_p)_{\text{ср}}}{(\rho c_p)_{\text{ж}}}. \quad (3)$$

Здесь $\chi_{\text{ср}}$ — температуропроводность среды; β — коэффициент теплового расширения; g — ускорение силы тяжести. Параметр c_F называют коэффициентом Форцгеймера; значение $c_F = 0$ соответствует модели пористой среды Дарси.

Граничные условия в безразмерных переменных имеют вид:

$$r = R: \quad \bar{v} = 0; \quad \text{а) } T = 0; \quad \text{б) } \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r = 1: \quad \bar{v} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\text{Bi} \cdot T. \quad (4)$$

Здесь

$$\text{Bi} = \frac{\alpha R_2}{\kappa}. \quad (5)$$

— число Био.

Сформулированная краевая задача решалась численно методом конечных разностей с использованием явной и неявной схем. Основные расчеты проводились в двумерной постановке в полярных координатах r, θ для переменных T , функции тока ψ и вихря ξ скорости фильтрации, определенных выражениями:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \xi = -\Delta \psi. \quad (6)$$

Использовалась равномерная сетка с шагом по радиальной координате 0.005 и по полярному углу 1.8° . Пористость среды во всех расчетах имела значение $\phi = 0.3$, величина b полагалась $b = 1$, что характерно для многих пористых материалов.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим вначале случай, когда температура поверхности внутреннего цилиндра постоянна и равна нулю (температура границы совпадает с температурой окружающей среды). Анализ результатов многочисленных расчетов показывает, что в слоях умеренной толщины ($R \leq 0.8$) при определенных значениях параметров Gr , Pr , Bi , Da возможны как симметричные S (относительно плоскости $\theta = 0$), так и асимметричные (A) конвективные движения. Симметричное течение, состоящее преимущественно из двух серповидных вихрей, возникает при сколь угодно малых значениях числа Грасгофа и существует в широком диапазоне значений параметров задачи. С увеличением числа Грасгофа под внутренним цилиндром образуется конвективный факел, а вблизи границ полости формируются пограничные слои. При $\text{Gr} > \text{Gr}^*$ это стационарное решение становится неустойчивым, возникает асимметричное движение (A) в виде конвективного факела, отклоненного от геометрической плоскости симметрии слоя. Значение критического числа Gr^* и величина угла отклонения зависят от параметров задачи. Так, например для $R = 0.2$, $\text{Bi} = 1$, $\text{Pr} = 1$ угол отклонения составляет 42° , тогда как при $R = 0.5$, $\text{Bi} = 1$, $\text{Pr} = 1$ он равен 15° .

Интенсивности вихревых движений в левой и правой половине слоя становятся различными, причем более интенсивное движение реализуется в любой половине слоя случайным образом. Линии тока и изотермы асимметричной конвекции представлены на рис. 1.

Возникновение асимметричного факела сопровождается пульсациями температуры в нижней части слоя, амплитуда которых быстро убывает с удалением от оси факела. Амплитуда пульсаций вблизи факела составляет примерно 0.2 от максимальной температуры в полости. Вблизи факела колебания температуры имеют почти периодический характер.

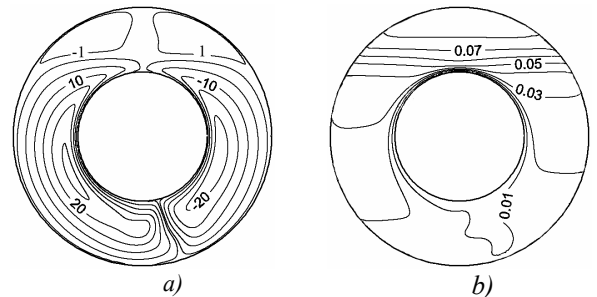


Рис. 1. Линии тока (а) и изотермы (б) конвективного движения в цилиндрическом слое для $R = 0.5$, $c_F = 0.55$, $\text{Gr} = 70\,000$, $\text{Pr} = 1$, $\text{Da} = 10^{-4}$, $\text{Bi} = 1$

Из рисунков следует, что над внутренним цилиндром конвективное движение слабое, жидкость в пористой среде имеет устойчивую термическую стратификацию с почти постоянным градиентом температуры. В экваториальной части полости жидкость практически изотермическая.

В относительно тонком цилиндрическом слое ($R > 0.8$) помимо двух серповидных вихрей могут возникать дополнительно конвективные ячейки, не нарушающие симметрию движения. Они образуются в области $\theta \approx \pi$ и имеют пространственный масштаб, равный толщине слоя. Асимметричное движение в таком слое не реализуется.

С ростом числа Био ($Bi > 10$) распределение температуры по радиальной координате становится близким к параболическому и, как следствие этого, в левой и правой половинах слоя образуются по два вихря, прилегающих к внутренней и внешней границам слоя с противоположными направлениями вращения. Линии тока и изотермы симметричного решения такого типа представлены на рис. 2. При достижении некоторого значения Gr^* оно также становится асимметричным. Наибольшей деформации подвергаются вихри, прилегающие к внутреннему цилиндру.

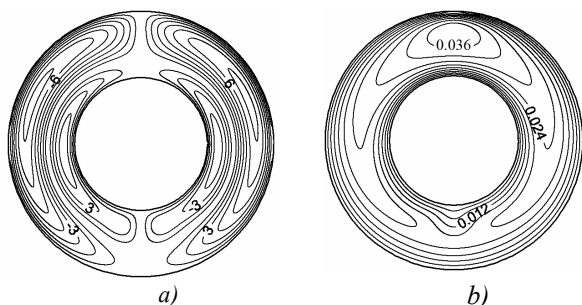


Рис. 2. Линии тока (a) и изотермы (b) конвективного движения в цилиндрическом слое для $R = 0.5$, $Gr = 10\,000$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-4}$, $c_F = 0.55$, $Bi = 100$

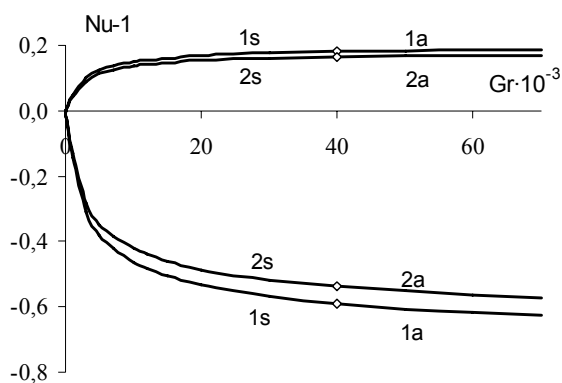


Рис. 3. Зависимости числа Nu от Gr на внутреннем (верхние кривые) и внешнем (нижние кривые) цилиндрах при $R = 0.5$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-4}$, $Bi = 1$. Кривые 1 и 2 относятся к значениям $c_F = 0$ и $c_F = 0.55$ соответственно. Участки кривых s и a отвечают решениям вида S и A . Маркеры на кривых соответствуют переходам от режима S к A и обратно

Для количественного анализа режимов конвекции удобно использовать число Нуссельта Nu , определенное как отношение теплоточков на внутренней Nu_i и внешней Nu_o поверхностях цилиндрического слоя, отнесенных к значениям таковых при отсутствии конвекции. На рис. 3 представлены графики зависимости Nu_i (верхние кривые) и Nu_o (нижние кривые) от числа Грасгофа. Величина $Nu-1$ определяет вклад конвекции в величину теплопереноса. Из графиков следует, что переход от симметричных конвективных движений к асимметричным не сопровождается резким изменением теплоточков через поверхности цилиндров. Обратное изменение режимов от A к S , как правило, сопровождается гистерезисом, величина которого по числу Грасгофа изменяется от 0 до 2000.

Графики зависимостей $Nu(Gr)$ для разных значений коэффициента Форцгеймера c_F показывают, что нелинейное слагаемое в уравнении переноса импульса (1) для указанных значений c_F слабо влияет на характер теплообмена в полости.

Как видно из рисунков, изменения теплоточков через границы внутреннего и внешнего цилиндров с ростом числа Грасгофа противоположны: Nu_i с увеличением Gr вначале возрастает, тогда как Nu_o уменьшается. Для каждого значения числа Био как Nu_i , так и Nu_o с ростом Gr стремятся к некоторому асимптотическому пределу, обусловленному законом сохранения тепловой энергии.

Плотности тепловых потоков на внутреннем и внешнем цилиндрах монотонно уменьшаются от своего максимального значения при $\theta = 0$ до минимума при $\theta = \pi$ для симметричной конвекции и при $\theta \approx \pi$ для асимметричного движения.

Для более полного представления о влиянии конвекции на характер теплообмена представляет интерес проследить за изменением средней T_c и максимальной T_m температуры в полости от числа Грасгофа. Графики этих зависимостей изображены на рис. 4. Из них следует, что средняя температура с ростом числа Грасгофа убывает, в то время как максимальная температура вначале возрастает.

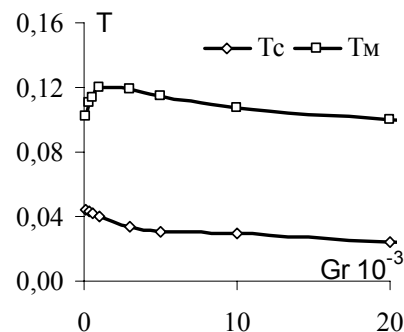


Рис. 4. Зависимости максимальной T_m и средней T_c температуры в слое от числа Грасгофа при $R = 0.5$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-4}$, $Bi = 1$, $c_F = 0.55$

С дальнейшим увеличением числа Грасгофа как T_m , так и T_c стремятся к некоторым предельным

значениям, обусловленным законом сохранения тепловой энергии. Как следует из вида изотерм, представленных на рис. 1 и 2, зона максимальной температуры расположена в полярной области вблизи поверхности внешнего цилиндра. Напротив, область с наименьшей температурой находится внутри факела. Ее расположение меняется скачком при изменении конвективного режима от симметричного к асимметричному и наоборот.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение рассмотрим кратко результаты расчетов в случае адиабатической внутренней поверхности цилиндрического слоя. На внешней границе по-прежнему выполняется ньютоновское условие теплоотдачи (4).

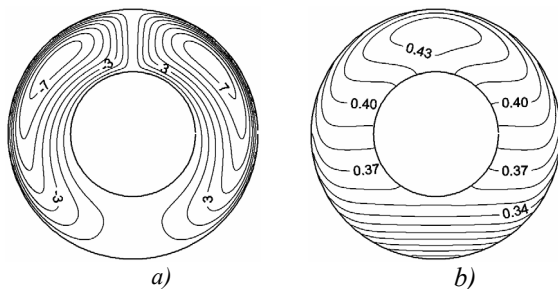


Рис. 5. Линии тока (а) и изотермы (б) конвективного движения в цилиндрическом слое с теплоизолированной внутренней поверхностью для $R = 0.5$, $Gr = 10\,000$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-4}$, $Bi = 1$, $c_F = 0.55$

Структуры возникающих конвективных движений представлены на рис. 5. Течение жидкости происходит преимущественно в верхней половине слоя, под внутренним цилиндром образуется застойная зона, размер которой зависит от числа Био. С ростом Bi величины максимальной и средней температуры в полости уменьшаются.

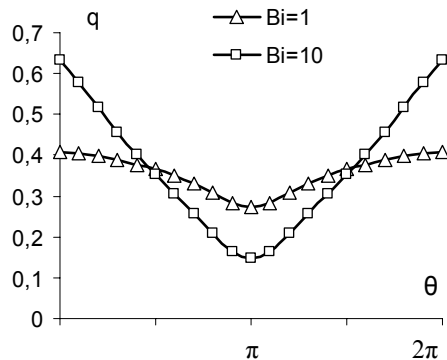


Рис. 6. Распределение плотности теплового потока на внешнем цилиндре при адиабатической внутренней поверхности для $R = 0.5$, $Pr = 1$, $Da = 10^{-4}$, $Gr = 10\,000$, $c_F = 1$

Графики зависимостей плотности теплового потока q от угловой переменной θ показаны на рис. 6. Максимальную величину q имеем на оси факела, а минимальную — в застойной зоне.

Для значений $Gr < 3 \cdot 10^5$ для $R = 0.5$, $Bi = 1$ и $Bi = 10$ потери устойчивости конвективного движе-

ния не происходит. Возможно, она происходит при больших значениях чисел Грасгофа и Био.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- b — отношение теплоёмкостей, $(c_p)_{cp}/(c_p)_{ж}$;
- $(c_p)_{ж}$ — теплоёмкость жидкости, Дж/(кг·К);
- $(c_p)_{cp}$ — теплоёмкость насыщенной среды, Дж/(кг·К);
- c_F — коэффициент Форцгеймера;
- g — ускорение силы тяжести;
- K — проницаемость пористой среды, м²;
- p — безразмерное давление, $\rho_{ж} v^2 / K$;
- Q — удельная мощность тепловыделения, Вт/м³;
- R_1, R_2 — радиусы цилиндрических поверхностей, м;
- R — отношение радиусов цилиндров R_1/R_2 ;
- r — безразмерная радиальная полярная координата, R_2 ;
- T_a — температура окружающей среды, К;
- T — безразмерная температура, QR_2^2 / κ ;
- T_m, T_c — максимальная и средняя температуры в полости, QR_2^2 / κ ;
- t — безразмерное время, R_2^2 / ν ;
- \vec{v} — безразмерный вектор скорости фильтрации, ν / R_2 ;
- v_r, v_θ — проекции \vec{v} в полярной системе координат;
- Bi, Da, Gr, Pr — числа Био, Дарси, Грасгофа и Прандтля соответственно, определяемые выражениями (3), (5);
- Nu — число Нуссельта, $2\pi QR_2^2$;
- Nu_i, Nu_o — теплотокны на внутренней и внешней поверхности цилиндрического слоя, отнесенные к значениям таковых при отсутствии конвекции;
- α — коэффициент теплоотдачи поверхности, Вт/(м²·К);
- β — коэффициент теплового расширения, К⁻¹;
- \vec{y} — единичный вектор, направленный вертикально;
- θ — азимутальная полярная координата, отсчитываемая от вертикали;
- κ — коэффициент теплопроводности среды, Вт/(К·м);
- ν — кинематическая вязкость жидкости, м²·с⁻¹;
- $\rho_{ж}$ — плотность жидкости, кг/м³;
- ϕ — пористость среды;
- ξ, ψ — безразмерные функция тока и вихрь скорости, определяемые равенствами (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nield D.A., Bejan A. Convection in a porous media. Springer-Verlag, New York, 1999, 546 p.
2. Vasseur P., Hung Nguyen T., Robillard L., Tong Thi V.K. Natural convection between horizontal concentric cylinders filled with a porous layer with internal heat generation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. Vol. 27(3). P. 337—349.
3. Siraev R.R., Yakushin V.I. Spontaneous breakdown of the symmetry of convective motion in the horizontal cylindrical layer of the saturated porous medium // Proc. Of the Intern. Conf. «Advanced Problems in Thermal Convection». Perm, Russia, 24—27 November 2003 / Perm State Un-ty. Perm 2004, P. 73—78.
4. Сираев Р.Р., Якушин В.И. Конвекция в горизонтальном цилиндрическом слое насыщенной пористой среды Дарси // Гидродинамика: Межвуз. сб. науч. трудов / Перм. ун-т. Пермь, 2004. С. 228—238.