

В.Д.Белик¹, Г.В.Ткаченко¹, Б.А. Урюков¹, Г.А.Фролов¹,
Т.Ф.Лычагина², В.Н.Сиренко², Н.К.Сорокин²

Институт проблем материаловедения НАНУ, Киев, Украина (1)
ГКБ «Южное», Днепропетровск, Украина (2)

НАГРЕВ ЖИДКОСТИ В БАКЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ И ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМАХ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ НА БОКОВОЙ СТЕНКЕ

АННОТАЦИЯ

Получено решение задачи о динамике нагрева жидкости в цилиндрическом баке при постоянном тепловом потоке через боковую стенку. Основной характеристикой процесса естественной конвекции, необходимой для решения задачи, является зависимость расхода жидкости, вовлеченной в движение на нагреваемой стенке, от продольной координаты. В предположении об отсутствии теплообмена между соседними слоями жидкости получено аналитическое решение. Приведены формулы для расчета распределения температуры в баке во времени и пространстве при ламинарном и турбулентном режимах естественной конвекции. Проведена оценка влияния факторов нестационарности и теплопроводности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача нагрева жидкости в вертикальном баке имеет важное значение для оптимизации рабочих процессов ракет и космических аппаратов. В последние годы ей уделяется значительное внимание, что, в частности, нашло отражение в трудах РНКТ. Тем не менее существующая в космической отрасли Украины методика расчета параметров термического расслоения компонентов топлива в ракетных баках при воздействии внешних атмосферных условий не удовлетворяет пользователей.

В данной работе описаны математические основы методики, позволяющей быстро рассчитывать температурные профили в топливных баках.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается динамика жидкости в цилиндрическом баке (рис. 1), боковая сторона которого нагревается заданным тепловым потоком q_w .

Высота жидкого объема равна H , радиус бака R . В результате нагрева на боковых стенках образуется естественно-конвективный пограничный слой, в котором нагретая жидкость поднимается вверх. Достигнув свободной поверхности, жидкость растекается по ней и затем опускается вниз, образуя в центральной части бака неравномерно прогретую зону — температурно-стратифицированный слой (затемненная область на рис. 1).

Температура и скорость жидкости значительно изменяются по радиусу только в узкой области, прилегающей к стенке, — в пограничном слое. В центральной части бака — в ядре — температура и скорость практически постоянны по горизонтали [1]. Благодаря этому вертикальный поток жидкости в ядре можно считать одномерным.

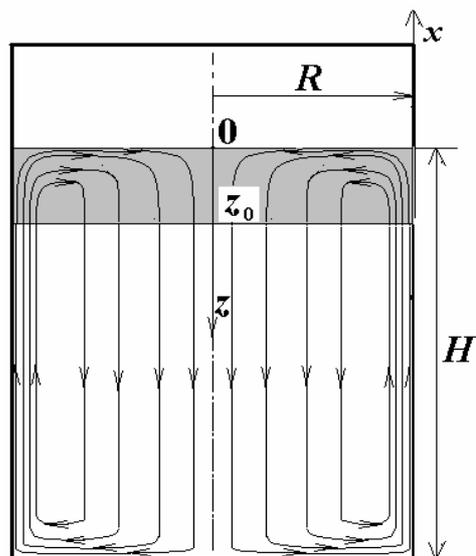


Рис. 1. Схематическая картина линий тока в баке с подогревом через стенку

Область растекания нагретого потока на свободной границе жидкого объема имеет небольшую протяженность [1]. Поэтому, в пределе, можно считать, что жидкость, нагретая в пограничном слое и выходящая на поверхность, мгновенно растекается по всей свободной поверхности, сохраняя свою температуру.

Системы координат: в пограничном слое, вследствие его малой толщины в сравнении с радиусом бака используется декартова система, причем ось x направлена вверх от нижнего края стенки, а в центральной части — ядре — цилиндрическая, в которой ось z начинается на свободной поверхности жидкого объема. В начальный момент жидкость неподвижна и равномерно прогрета. Теплообмен на свободной поверхности и на дне бака отсутствует.

Расход жидкости в пограничном слое $G(x)$ пропорционален числу Нуссельта. На ламинарном режиме естественной конвекции при постоянной температуре стенки $Nu_x \sim Gr_x^{1/4}$ [2], т.е. $G(x) \sim x^{3/4}$. При нагреве постоянным тепловым потоком $Nu_x \sim Gr_x^{*1/5}$, где Gr_x^* — модифицированное число Грасгофа (пропорциональное x^4) [3], т.е. $G(x) \sim x^{4/5}$. Для естественной конвекции в большеразмерных баках, например в топливных баках ракетополетов, характерны большие значения числа Рэлея и ламинарная область течения на боковой стенке занимает малую в сравнении с общей высотой зону. В

таких случаях оправдано предположение о том, что турбулентный режим течения начинается непосредственно от нижнего края стенки. При постоянной температуре стенки $Nu_x \sim Gr_x^{1/3}$ [2, 3], а при постоянном тепловом потоке $Nu_x \sim Gr_x^{*1/4}$, т.е. в обоих случаях $G(x) \sim x$.

Вследствие неразрывности расход $G(x)$ равен расходу жидкости в ядре в том же горизонтальном сечении, т.е. при $z = H - x$. Следовательно, скорость движения жидкости в ядре находится по формуле

$$v = G(H - z) / \pi R^2 \rho. \quad (1)$$

Благодаря тому, что градиент температуры в стратифицированной области обычно невелик [1], можно в первом приближении пренебречь теплообменом между соседними слоями, т.е. положить, что каждый горизонтальный элементарный (бесконечно тонкий) слой жидкости движется без изменения температуры. Тогда распределение температуры во всем стратифицированном слое описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Точное решение его при скорости, зависящей только от координаты, имеет следующий вид:

$$T - T_0 = \theta \left(t - \int_0^z \frac{dz}{v} \right), \quad (3)$$

где T_0 — начальная температура жидкости. В данном выражении θ — произвольная функция. Ее конкретный вид определяется, если известна зависимость температуры при $z = 0$ (на свободной поверхности).

Нижняя граница стратифицированного слоя в какой-либо момент времени отвечает положению начального элементарного слоя, т.е. возникшего в сечении $z = 0$ в момент $t = 0$. Следовательно, его положение $z = z_0$ определяется из уравнения

$$\int_0^{z_0} \frac{dz}{v} = t. \quad (4)$$

Чтобы найти функцию θ , рассмотрим тепловой баланс всего стратифицированного слоя. Тепло, которое поступило в бак за определенное время t , в конечном счете пошло на нагрев стратифицированного слоя. Следовательно, имеет место соотношение

$$2\pi R \int_0^t \left(\int_0^H q_w dx \right) dt = \pi R^2 \rho c \int_0^{z_0} (T - T_0) dz. \quad (5)$$

Из предыдущего ясно, что скорость жидкости в ядре является степенной функцией координаты: $v(x) \sim x^n$ или

$$v = v' \left(\frac{x}{H} \right)^n = v' \left(1 - \frac{z}{H} \right)^n. \quad (6)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим вначале ламинарный режим конвекции, при котором $n = 4/5$ ($q_w = \text{const}$). Распределение температуры в стратифицированном слое в этом случае описывается формулой

$$T - T_0 = \theta \left(t - \int_0^z \frac{dz}{v} \right) = \theta \left\{ t - \frac{5H}{v'} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{H} \right)^{1/5} \right] \right\}. \quad (7)$$

При постоянном тепловом потоке формула (5) приобретает вид

$$\frac{2q_w}{R\rho c} t = \int_0^{z_0} \theta \left\{ t - \frac{5H}{v'} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{H} \right)^{1/5} \right] \right\} \frac{dz}{H}. \quad (8)$$

Обозначив через U аргумент функции θ , получим после некоторых преобразований

$$\frac{2Hq_w}{R\rho cv'} t = \int_0^t \theta(U) \left[1 - \frac{v'}{5H} (t - U) \right]^4 dU.$$

Обозначим:

$$\tau = \frac{v'}{5H} t; \quad \varphi = \frac{v'}{5H} U; \quad f(\varphi) = \frac{R\rho cv'}{2q_w H} \theta(U). \quad (9)$$

Тогда уравнение (9) можно представить в обобщенном виде

$$\tau = \int_0^\tau f(\varphi) (1 - \tau + \varphi)^N d\varphi. \quad (10)$$

где $N = 4$.

Решение этого уравнения можно провести двумя способами. Первый состоит в 5-кратном дифференцировании выражения (10) по τ , в результате чего получается дифференциальное уравнение 5-й степени с постоянными коэффициентами, решение которого представляет собой сумму экспонент, умноженных на постоянные интегрирования. Последние находятся подстановкой общего решения во все предыдущие уравнения. В результате получим

$$f(\tau) = \exp(1.7294442\tau) [0.91474669 \cos(0.88897438\tau) + 0.47020098 \sin(0.8889743761\tau)] + \exp(0.27055577\tau) [0.08525331 \cos(2.50477590\tau) + 0.78926591 \sin(2.504775904\tau)]. \quad (11)$$

Таким образом, распределение температуры в ядре рассчитывается по формуле

$$T - T_0 = \frac{2q_w H}{R\rho cv'} f(\tau'), \quad (12)$$

$$\tau' = \frac{v'}{5H} t - 1 + \left(1 - \frac{z}{H} \right)^{1/5}.$$

Функция $f(\tau')$ — это функции $f(\tau)$ в формуле (11), в которой аргумент τ заменен на τ' .

Зависимость нижнего края стратифицированного слоя от времени в соответствии с формулой (4) имеет вид

$$\frac{z_0}{H} = 1 - \left(1 - \frac{v't}{5H}\right)^5. \quad (13)$$

Начиная с момента $t = 5H/v'$, стратифицированный слой будет простираться на всю длину бака. При этом уравнение (12) не изменится. Отличие этой ситуации от предыдущей заключается лишь в том, что ранее к нижнему краю стенки жидкость подходила с постоянной температурой T_0 , а теперь — с переменной во времени $T(z = H)$.

Второй способ решения уравнения (10) заключается в приведении его к известному виду интегральных уравнений. Введем функцию

$$\psi(\tau) = \int_0^\tau f(\varphi) d\varphi.$$

Интегрируя (10) по частям, получаем

$$\psi(\tau) = \tau + N \int_0^\tau \psi(\varphi)(1 - \varphi + \tau)^{N-1} d\varphi.$$

Это есть уравнение Вольтерра второго рода с ядром типа свертки, которое в общей форме имеет вид

$$\psi(\tau) = g(\tau) + \int_0^\tau \psi(\varphi)k(\tau - \varphi) d\varphi. \quad (14)$$

Решение подобных уравнений находится с помощью преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^\infty \psi(\tau)e^{-p\tau} d\tau;$$

Применяя это преобразование к (14), получаем

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - K(p)}, \quad (15)$$

где $g(\tau) \rightarrow G(p); k(\varphi) \rightarrow K(p)$.

В рассматриваемом случае

$$G(p) = \frac{1}{p^2}, \quad (16)$$

$$K(p) = p^N - N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{(N-j-1)! p^{j+1}}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{p^{N-2}}{Z(p)}, \quad (17)$$

$$Z(p) = p^N - N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j p^{N-j-1}}{(N-j-1)!}.$$

В знаменателе функции $F(p)$ имеется полином, поэтому для нахождения обратного преобразования следует использовать теорему вычетов.

В результате получаем:

$$\psi(\tau) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^{N-2}}{Z'(p_k)} \exp(p_k \tau);$$

$$f(\tau) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^{N-1}}{Z'(p_k)} \exp(p_k \tau); \quad Z' = \frac{dZ}{dp}. \quad (18)$$

Для $N = 4$ будем иметь

$$Z(p) = p^4 - 4! \left(\frac{p^3}{3!} - \frac{p^2}{2!} + p - 1 \right).$$

Расчет по формуле (18), естественно, совпадает с решением (11).

Из анализа полученного решения следует, что в начальный момент значение температуры на свободной поверхности жидкого объема отлично от нуля. Это есть следствие предположения о том, что выражение (5) справедливо в любой момент времени, в том числе и в начальный. Иными словами, предполагается, что уже в начальный момент существует стационарный процесс движения массы жидкости вдоль боковой стенки и на свободную поверхность выносятся слои жидкости, прогретый всем теплом, выделенным на стенке. В действительности же имеет место начальный период образования стратифицированного слоя, в течение которого, во-первых, происходит выход процесса конвекции на установившийся режим. Во-вторых, происходит нарастание температуры жидкости, вынесенной на поверхность, вследствие конечной скорости движения жидкости в пограничном слое.

Длительность первого процесса можно оценить на основе формулы Черчилля для установления стационарной конвекции, приведенной в [2]:

$$\text{Nu}_x = \text{Nu}_{xs} \left[1 + \left(\frac{\pi x^2}{4at} \right)^3 \text{Nu}_{xs}^{-6} \right]^{1/6}.$$

По этой формуле можно оценить время t_1 , за которое добавок к единице в квадратных скобках будет иметь порядок малой величины ε :

$$t_1 \approx \frac{\pi}{4(6\varepsilon)^{1/3}} \frac{H^2 \rho c}{\lambda} \text{Nu}_{Hs}^{-2}.$$

Суть второго процесса заключается в том, что в течение некоторого времени от начала нагрева на свободную поверхность выносятся слои, которые были нагреты теплом, выделившимся на участках стенки, близлежащих к свободной поверхности, и вследствие этого были нагреты незначительно. Время установления этого процесса можно оценить, если учесть, что характерная скорость конвективного потока вдоль нагреваемой стенки имеет порядок

$$u \approx \sqrt{g\beta(T_w - T_0)x}.$$

Отсюда получаем, что время, в течение которого частицы, находившиеся на нижнем крае стенки, достигнут свободной поверхности, примерно равно

$$t_2 \approx 2 \sqrt{\frac{H}{g\beta(T_w - T_0)}} = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{g\beta q_w} \text{Nu}_H}.$$

Если максимальный из периодов t_1 и t_2 сопоставим с общей длительностью процесса конвекции, то необходимо рассматривать нестационарную конвекцию. Если же они малы, то можно считать, что указанная первоначальная температура на свободной границе устанавливается мгновенно.

Кроме того, решение дает скачок температуры на нижней границе стратифицированного слоя, что является следствием предположения об отсутствии теплообмена между соседними слоями. Ясно, что резкий фронт температуры со временем должен размываться за счет теплопроводности. Область, в которой происходит спад температуры до первоначальной (T_0), имеет приблизительно следующий размер:

$$\Delta z \approx \sqrt{12 \frac{\lambda t}{\rho c}}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

Теперь обратимся к турбулентному режиму конвекции, при котором $v \sim x$. Из соотношений (1), (3) и (4) следует

$$\begin{aligned} v &= v' \frac{x}{H} = v' \left(1 - \frac{z}{H}\right), \\ T - T_0 &= \theta \left(t + \frac{H}{v'} \ln \left(1 - \frac{z}{H}\right) \right), \\ \frac{z_0}{H} &= 1 - \exp \left(- \frac{v' t}{H} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Интересно, что нижняя граница стратифицированного слоя не достигает дна бака ($z_0 = H$) за конечное время. Подставляя в (5), получаем

$$\frac{2Hq_w}{R\rho c} t = \int_0^{z_0} \theta \left(t + \frac{H}{v'} \ln \left(1 - \frac{z}{H}\right) \right) dz.$$

Обозначая аргумент функции θ через U , после некоторых преобразований находим

$$\frac{2Hq_w}{R\rho cv'} t \exp \left(\frac{v' t}{H} \right) = \int_0^t \theta(U) \exp \left(\frac{v' U}{H} \right) dU. \quad (20)$$

После дифференцирования по t получаем

$$\varphi(t) = \frac{2Hq_w}{R\rho cv'} \left(1 + \frac{v' t}{H} \right).$$

Таким образом, распределение температуры в стратифицированном слое по высоте и по времени при турбулентном режиме конвекции определяется формулой

$$T - T_0 = \frac{2Hq_w}{R\rho cv'} \left[1 + \frac{v' t}{H} + \ln \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right]. \quad (21)$$

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА

На рис. 2 показано сопоставление распределений температуры в стратифицированном слое для ламинарного и турбулентного режимов для разных моментов времени в форме нижеследующих зависимостей. Для ламинарного режима:

$$f_L = f(\eta); \quad \eta = \frac{1}{5} \bar{t} - 1 + (1 - \zeta)^5,$$

$$\text{где } \bar{t} = \frac{v' t}{H}; \quad \zeta = \frac{z}{H}.$$

Функция $f(\eta)$ соответствует формуле (11), в которой аргумент τ заменен на η .

Для турбулентного режима:

$$f_T = 1 + \bar{t} + \ln(1 - \zeta).$$

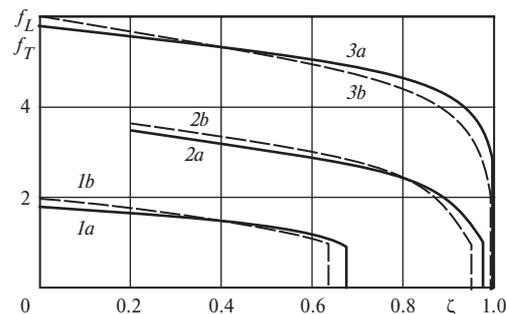


Рис. 2. Сопоставление профилей температур жидкости в баке при ламинарном (a , сплошные линии) и турбулентном (b , пунктир) режимах естественной конвекции: 1 — $t = 1$; 2 — $t = 3$; 3 — $t = 5$

Из рисунка видно, что различие ламинарного и турбулентного режимов формирования стратифицированных слоев как по величине и форме распределения температуры, так и по размеру слоя в координатах \bar{t} и ζ невелико. Очевидно, это обусловлено тем, что показатель степени $4/5$ в зависимости скорости v от координаты при ламинарном режиме достаточно близок к единице, которая соответствует турбулентному режиму.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $Gr_x = g\beta(T_w - T_0)x^3/\nu^2$ — число Грасгофа;
- $Gr_{x*} = g\beta(T_w - T_0)x^4/\nu^2\lambda$ — модифицированное число Грасгофа;
- $Nu_x = q_w x / \lambda(T_w - T_0)$ — число Нуссельта;
- Nu_{xs} — стационарное число Нуссельта;
- p_k — корень функции $Z(p)$;
- T_0 — начальная температура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеева Л.А., Черкасов С.Г. Теоретическое исследование квазистационарного режима естественной конвекции в вертикальной цилиндрической емкости с теплопроводной стенкой // Тр. Третьей Российской национальной конференции по теплообмену. 2002. Т. 3. С. 16—119.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
3. Джалурия Й. Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 396 с.