УДК 536.24

П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова

Институт механики МГУ, Москва, Россия

ЛАГРАНЖЕВ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

АННОТАЦИЯ

Развита вычислительная технология моделирования плоских нестационарных движений вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в лагранжевых координатах — метод вязких вихретепловых доменов (ВВД). Исследована задача свободной тепловой конвекции системы первоначально локализованных тепловых «пятен» в неограниченном пространстве вязкой теплопроводной жидкости в постоянном поле сил тяжести. Проанализированы эффекты интерференции двух нагретых первоначально локализованных областей при свободной конвекции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычислительные вихревые методы основаны на лагранжевом описании движения жидкости. Эти методы являются эффективным инструментом теоретического исследования концентрированных вихревых структур. В этом случае они имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными конечно-разностными, конечно-элементными и псевдоспектральными подходами. С помощью вихревых методов решались многие задачи аэрогидродинамики. Современное состояние вопросов развития и использования вихревых методов отражено в обзоре [1] (до уровня 1988 г.), в монографии [2] (до 1995), в обзоре [3] (до 2005). Тем не менее до сих пор серьёзные трудности при использовании вихревых методов вызывают вопросы учёта вязкости и теплопроводности среды. Применение вихревых методов в случае вязкой теплопроводной жидкости осложнено тем, что циркуляция скорости по выделенному жидкому контуру и тепловая энергия внутри этого контура не сохраняются из-за диффузии завихренности и тепла. Существует ряд известных методов учёта диффузионного смещения завихренности и тепловой энергии относительно жидкости. В методе случайных блужданий [4] к конвективному смещению дискретного лагранжева элемента добавляется случайное смещение с гауссовым распределением вероятности. Способы перераспределения циркуляции между дискретными лагранжевыми частицами для имитации диффузии рассматриваются в работе [5]. В [7] вводится понятие диффузионной скорости, моделируемой как притяжение и отталкивание лагранжевых частиц. В работе [8] показана возможность обобщения разработанных моделей диффузии с целью совместного решения уравнений Навье-Стокса и теплопроводности.

В рассматриваемом в настоящей работе методе ВВД реализована модель диффузионного притяжения и отталкивания лагранжевых вихревых и тепловых доменов, которая, в отличие от метода «случайных блужданий» [4] позволяет избежать погрешностей, возникающих из-за стохастического описания диффузии. В отличие от метода «расширяющихся вихревых зёрен» [6] метод ВВД сходится к уравнениям Навье-Стокса и теплопроводности, при этом параметры диффузионного взаимодействия доменов определяются естественным образом, исходя из их реального расположения в потоке. В отличие от получившего распространение в последнее время метода перераспределения завихренности [5], диффузия в методе ВВД моделируется не за счёт перераспределения циркуляции (тепловой энергии) между конвективно движущимися вихревыми (тепловыми) элементами (которое рассчитывается путём решения системы линейных уравнений для всех лагранжевых элементов, лежащих в эмпирически заданной окрестности каждого элемента), а за счёт дополнительного диффузионного смещения и деформации каждого элемента, названного в [10] «доменом». Важной чертой метода является оригинальное интегральное представление [9] для диффузионной скорости, позволяющее более удачно, чем в [7,8], описать взаимодействие близких доменов и предотвратить их нефизичное слипание, а также обоснованно вычислить диффузионную скорость доменов, находящихся вблизи поверхности, что, в частности, позволило рассчитывать силу трения [9], действующую на обтекаемые тела. Следует подчеркнуть, что в применяемой модели отсутствуют неопределённые параметры, причём доказано, что в пределе при измельчении доменов и увеличении их количества перемещение вихревых и тепловых доменов описывает эволюцию полей завихренности и температуры согласно двумерным нестационарным уравнениям Навье-Стокса и теплопроводности.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Уравнение теплопроводности в несжимаемой жидкости $\dfrac{\partial T}{\partial t} + V\nabla T = a\nabla^2 T$ $(a = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}})$ в двумерном случае можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_d^{(T)}\right)T\right) = 0,\ \boldsymbol{V}_d^{(T)} = -a\nabla T / T. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что величина $\Theta = T\Delta S$ внутри некоторого контура, движущегося со скоростью $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}_d$, оказывается постоянной. Это означает, что если разбить пространство течения на элементарные площадки ΔS_i, содержащие тепловую энергию $\Theta_i = T_i \Delta S_i$, (будем называть эти площадки тепловыми частицами), то можно рассматривать эволюцию поля температуры в лагранжевых координатах как результат движения таких частиц со скоростями, равными $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_d^{(T)}$. Если рассматривается течение в безграничном пространстве или в области, большая часть которой заполнена жидкостью с постоянной температурой T_0, то целесообразно рассматривать тепловые частицы только в области возмущенной температуры и приписывать им энергию, пропорциональную $\Theta_i=(T_i-T_0)\Delta S_i$. Уравнение, описывающее изменение поля $\theta=T-T_0$, совпадает с (2.1):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_d^{(T)}\right)\theta\right) = 0,\ \boldsymbol{V}_d^{(\Theta)} = -a\nabla\theta/\theta.$$

При лагранжевом описании поля течения координаты тепловых частиц удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{V}_i + \boldsymbol{V}_{di}^{(\theta)}.$$

Для вычисления $\boldsymbol{V}_d^{(\theta)}$ используются интегральные представления [9]:

$$\boldsymbol{V}_d^{(\theta)} = -a\frac{\boldsymbol{I}_2}{I_1} + a\frac{\boldsymbol{I}_3}{I_0},$$

$$I_0(\boldsymbol{R}) = \int_S \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$I_1(\boldsymbol{R}) = \int_S \theta(\boldsymbol{r}) \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$\boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{R}) = -\int_S \frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|\varepsilon}\theta(\boldsymbol{r}) \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}{\varepsilon}\right) ds,$$

$$\boldsymbol{I}_3(\boldsymbol{R}) = -\int_S \frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|\varepsilon} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}{\varepsilon}\right) ds.$$

Последние, в свою очередь, могут быть записаны в виде сумм по тепловым частицам

$$\boldsymbol{I}_2 \approx \sum \frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_i|\varepsilon}\Theta_i \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_i|}{\varepsilon}\right),$$

$$I_1 \approx \sum \Theta_i \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_i|}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{I}_3(\boldsymbol{R}) = -\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{n}_k |\boldsymbol{d}_k| \exp(-|\xi_k|),$$

$$\xi_k = \frac{\boldsymbol{R}-\hat{\boldsymbol{r}}_k}{\varepsilon};\ \boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k;\ \hat{\boldsymbol{r}}_k = 0.5(\boldsymbol{r}_{k+1} + \boldsymbol{r}_k),$$

$$I_0(\boldsymbol{R}) \approx 2\pi\varepsilon^2 - \varepsilon\sum_{k=1}^{K} \frac{|\xi_k \times \boldsymbol{d}_k|}{\xi_k^{\ 2}}\left(|\xi_k|+1\right)\exp\left(-|\xi_k|\right).$$

Суммирование по i — это суммирование по «тепловым частицам», по k — суммирование по отрезкам контура обтекаемой поверхности, $\Delta r_i<\varepsilon<L$, где Δr_i — расстояние между соседними частицами, L - масштаб неоднородности поля завихренности. Граничное условие для поля температуры может быть сформулировано в виде заданной функции температуры на поверхности, заданного потока тепла или зависимости потока от температуры. Во всех случаях эти условия могут быть удовлетворены рождением на каждом временном шаге новых тепловых частиц. В отсутствие архимедовых сил тепловые частицы играют роль пассивной примеси и не влияют на распределение завихренности и скорости несжимаемой жидкости. При наличии архимедовых сил уравнение конвекции неоднородной жидкости в приближении Буссинеска [11] имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = \left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_d\right) \times \boldsymbol{\Omega} - \mathrm{Gr}\,\theta\boldsymbol{e}_g - \nabla\left(p + \frac{V^2}{2}\right), \qquad (2.2)$$

так как согласно [9] слагаемое $\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega}$ в двумерных течениях можно переписать как

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{V}_d^{(\Omega)} \times \boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{V}_d^{(\Omega)} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\Omega/\Omega.$$

Если применить оператор rot к обеим частям уравнения (2.2), получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{Gr}\,\boldsymbol{e}_g \times \nabla\theta + \operatorname{rot}\left(\left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_d^{(\Omega)}\right) \times \boldsymbol{\Omega}\right). \qquad (2.3)$$

Для моделирования генерации завихренности архимедовыми силами в соответствии с уравнением (2.3) наряду со смещением вихревых доменов со скоростью $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}_d^{(\Omega)}$ можно добавлять на каждом временном шаге новые вихревые домены или изменять циркуляцию существующих доменов. Поскольку рождение новой циркуляции происходит только в области возмущённой температуры, удобно вводить на «тепловых частицах» новые вихревые домены с циркуляцией

$$\Gamma_i = -\mathrm{Gr}\,\Theta_i \Delta t \frac{\nabla\theta}{\theta} \times \boldsymbol{e}_g = \mathrm{Ra}\,\Theta_i \Delta t \boldsymbol{V}_d^{(\theta)} \times \boldsymbol{e}_g.$$

После образования новых доменов в случае присутствия других вихрей в этой области можно провести объединение близко расположенных вихрей. Дальнейшее движение вихревых доменов может отличаться от движения тепловых частиц из-за различия диффузионных скоростей. При решении системы уравнений, обеспечивающей условие непротекания на поверхности, необходимо в уравнении сохранения циркуляции учитывать также вновь родившиеся вихри таким образом, чтобы сумма циркуляций всех вихрей была постоянной. Нетрудно видеть, что в безграничном пространстве при отсутствии обтекаемых поверхностей и условии стремления θ к нулю на бесконечности быстрее, чем $1/R^2$, суммарная циркуляция, порожденная архимедовыми силами, равна нулю. Зная распределение завихренности в пространстве, можно вычислить скорость жидкости в любой точке, считая жидкость несжимаемой. При необходимости можно учесть тепловое расширение частиц, введя в точках расположения «тепловых частиц» источники с интенсивностью, пропорциональной скорости изменения температуры.

3. РАСЧЁТ СВОБОДНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена плоская задача о свободной нестационарной конвекции системы первоначально локализованных тепловых «пятен» в неограниченном пространстве вязкой теплопроводной жидкости в постоянном поле сил тяжести. На рис. 3.1 показано развитие процесса конвекции двух тепловых включений, первоначально имевших форму одинаково нагретых кругов, расположенных вертикально один над другим. Здесь и далее число Грасгофа Gr = = $2{\cdot}10^4$, число Прандтля Pr = 1, безразмерный радиус кругов равен 1, чёрными и серыми точками показаны тепловые частицы для первой и второй нагретых областей соответственно. На рис. 3.2 показано развитие процесса конвекции двух тепловых включений, первоначально имевших форму одинаковых однородно нагретых кругов, расположенных на одной на одной горизонтали. Видно, что при вертикальном расположении (рис. 3.1) с течением времени нижнее тепловое включение догоняет верхнее и происходит их слияние, а скорость конвекции возрастает по сравнению со случаем горизонтального расположения кругов (рис. 3.2). Аналогичный эффект наблюдается при начальном расположении тепловых включений по диагонали (рис. 3.3). На рис. 3.4 дано сравнение зависимостей высоты подъёма различных систем тепловых включений от времени $H(t)$. Высота H определяется по верхнему «фронту» нагретой области. Видно, что на начальном этапе конвекции системы горизонтально расположенных тепловых включений поднимаются медленнее, чем одиночное включение, а системы вертикально расположенных тепловых включений поднимаются быстрее.

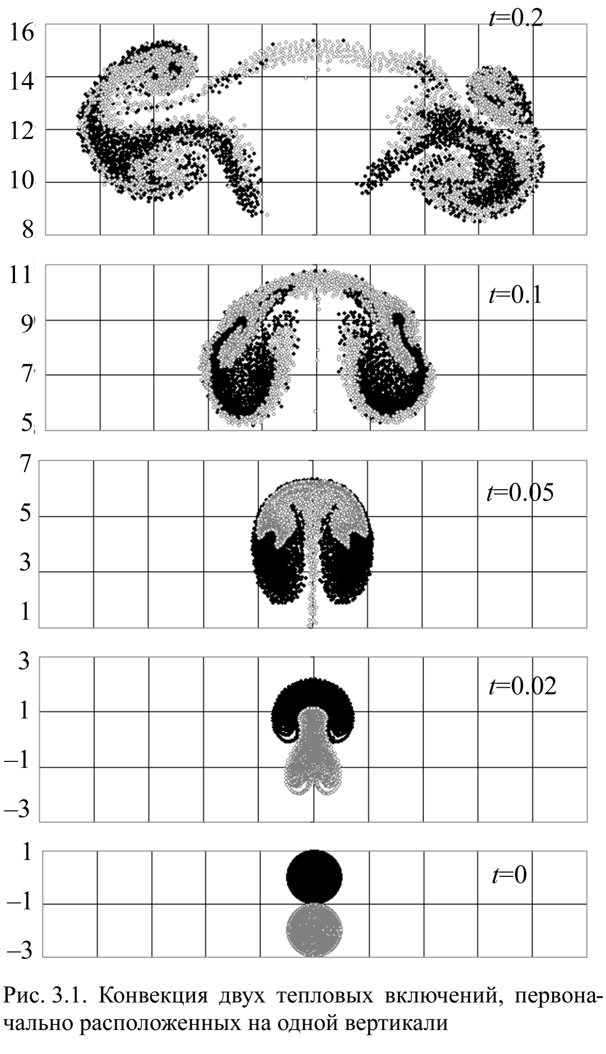

Рис. 3.1. Конвекция двух тепловых включений, первоначально расположенных на одной вертикали

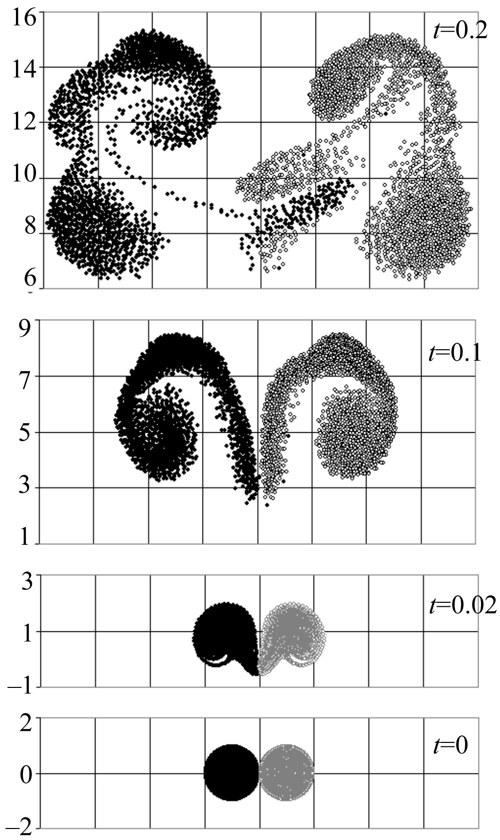

Рис. 3.2. Конвекция двух тепловых включений, первоначально расположенных на одной горизонтали

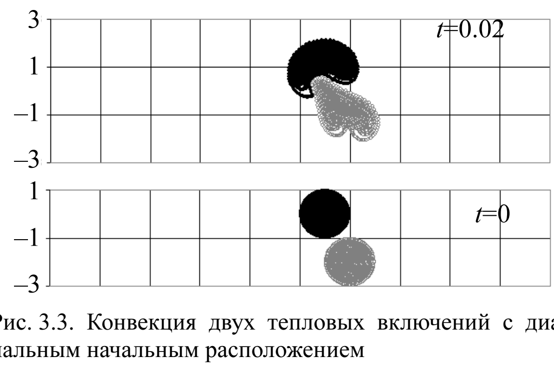

Рис. 3.3. Конвекция двух тепловых включений с диагональным начальным расположением

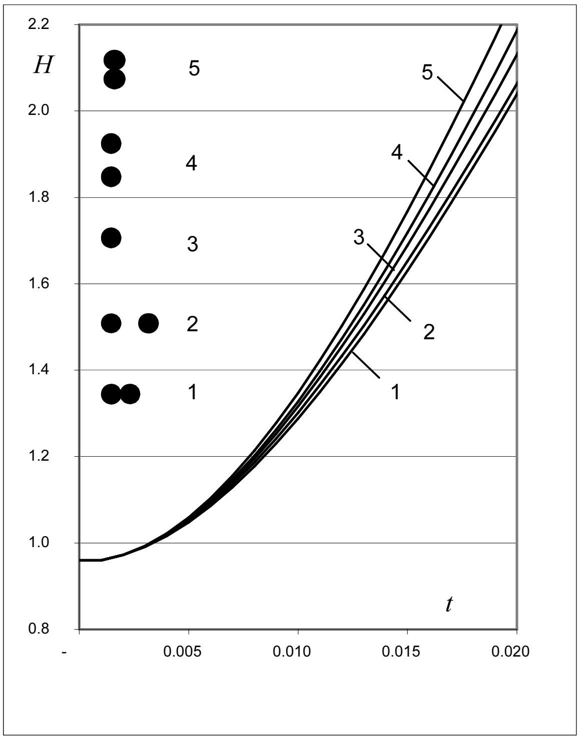

Рис. 3.4. Зависимости высоты подъёма систем тепловых включений от времени при различном их относительном начальном расположении

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита вычислительная технология решения задач нестационарной гидродинамики и тепловой конвекции на основе лагранжева численного метода вязких вихретепловых доменов (ВВД). На основе метода ВВД исследовано явление свободной конвекции системы первоначально локализованных тепловых «пятен» в неограниченном пространстве вязкой теплопроводной жидкости в постоянном поле сил тяжести. Исследовано влияние начального взаимного расположения «пятен» на общую скорость их подъема. Показано, что системы двух горизонтально расположенных тепловых включений поднимаются медленнее, чем одиночное включение, а системы двух вертикально расположенных тепловых включений, наоборот, поднимаются быстрее.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №04-01-00554, а также программы НШ-8597.2006.1.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

T — безразмерная температура;
θ — отклонение безразмерной температуры от невозмущённого значения;
$\boldsymbol{V}$ — безразмерная скорость жидкости;
$\boldsymbol{\Omega}$ — безразмерная завихренность;
t — безразмерное время;
$\boldsymbol{V}_d$ — безразмерная диффузионная скорость;
Pr — число Прандтля;
Gr — число Грасгофа;
Ra — число Релея;
ΔS — безразмерная площадь лагранжевой тепловой частицы или вихревого домена;
Θ — безразмерная тепловая энергия лагранжевой частицы;
Γ — безразмерная циркуляция лагранжева вихревого домена;
$\boldsymbol{R}$ — безразмерный радиус-вектор лагранжевой частицы;
ε — параметр интегрального представления диффузионной скорости;
$\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к обтекаемой поверхности;
$\boldsymbol{e}_g$ — единичный вектор, сонаправленный с силой тяжести.
Индексы:
i — номер лагранжевой частицы;
k — номер отрезка ломаной, аппроксимирующей обтекаемый контур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сарпкайя Т.** Вычислительные методы вихрей // Современное машиностроение, сер. А. 1989. № 10. С. 1—60.
2. **Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.** Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1995. 368 с.
3. **Barba L.A., Leonard A., Allen C.B.** Advances in viscous vortex methods — meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 47. P. 387—421.
4. **Chorin A.J.** Numerical study of slightly viscous flow // Journal of Fluid Mechanics. 1973. V. 57. P. 785—796.
5. **Shankar S., van Dommelen L.** A new diffusion procedure for vortex methods // Journal of Computational Physics. 1996. V. 127. P. 88—109.
6. **Kuwahara K., Takami H.** Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of points // Journal of the Physical Society of Japan. 1973. V. 34. P. 247—253.
7. **Ogami Y., Akamatsu T.** Viscous flow simulation using the discrete vortex model -the diffusion velocity method // Computers & Fluids. 1991. Vol. 19. № ¾. P. 433—441.
8. **Ogami Y., Akamatsu T.** Simulation of Heat-Vortex Interaction by the Diffusion Velocity Method // Third International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods, Proceedings. 1999. Vol. 7. P. 314—324.
9. **Дынникова Г.Я.** Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399. № 1. С. 42—46.
10. **Гувернюк С.В.** Новые возможности вычислительных вихревых методов при моделировании нестационарных двумерных течений вязкой жидкости // Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (16-21 февраля 2004 г.). М.: Издательство Московского университета, 2004. С. 97—102.
11. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена // М.: Наука, 1984. 288 с.