УДК 536.24

С.Н. Харламов

Томский государственный университет, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ ПО МОДЕЛЯМ С ТРАНСПОРТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДЛЯ МОМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

В работе анализируются возможности отдельных версий модели переноса рейнольдсовых напряжений (ПРН-модель) и турбулентных потоков тепла в расчетах развивающихся неизотермических течений. Особое внимание уделяется моделированию низкорейнольдсовой пристеночной области течения и теплообмена во внутренних системах. Отобранные версии: Ханжалика, Симы, Элгобаши, а также предлагаемая в работе ПРН-L- модель отличаются способами аппроксимации членов высшего порядка. Представлены многочисленные сравнения результатов расчета локальных параметров течения и теплообмена с соответствующими экспериментальными данными. Установлено, что характеристики сложного сдвигового течения успешно могут быть предсказаны только на базе моделей, учитывающих анизотропный пристеночный характер процессов турбулентного переноса. Отмечаются достоинства и недостатки ПРН - моделей. Дано объяснение наблюдаемым явлениям в переносе осредненных и пульсационных величин неизотермических течений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ структуры турбулентного неизотермического потока в пристеночной зоне представляет собой актуальную задачу не только в случаях специфического течения теплоносителя по длине энергетического устройства, но и в простых канонических движениях. В задачах, связанных с инженерными приложениями в случаях течений с кривизной линий тока, отрывом, ламинаризацией, химическими реакциями, интенсивным теплопереносом и т.д., выбор в пользу моделей переноса рейнольдсовых напряжений с ε-базой [1-3] обусловлен потребностью детального расчета “тонкой” структуры сложных сдвиговых потоков. Анализ литературы показывает (например, [4, 5]), что такие версии весьма успешны в предсказании сложных сдвиговых течений, но использование их в практике прикладных расчетов ограничено трудностями реализации в пристеночных областях, связано с отсутствием надежных данных об их возможностях в расчетах течений в широком диапазоне изменений параметров, определяющих течение и теплообмен. Это заставляет вести предварительную работу по оценке пригодности данных моделей к описанию внутренних изотермических и неизотермических течений в трубах и каналах постоянного и переменного поперечного сечения.

Справедливости ради заметим, что в качестве альтернативных к ПРН-моделям, в приложениях используются двухпараметрические модели турбулентности, типа: k-ε, k-L, k-ω. Однако в отмеченных условиях они работают ограниченно, требуют значительной модификации, что, в целом, говорит о бесперспективности данного подхода.

В связи с вышесказанным в работе поставлены цели:

1) адаптировать различные версии моделей рейнольдсовых напряжений к оценке развивающихся изотермических и неизотермических, прямоточных и закрученных турбулентных течений в трубах и каналах постоянного и переменного поперечного сечения;

2) утвердиться в достоинствах ПРН-моделей в способности расчета анизотропных пристеночных течений путем сравнения с экспериментальными данными по широкому кругу параметров;

3) оценить замыкающие аппроксимации ПРН-моделей, значения ее численных параметров с целью развить форму модели, рекомендуемую к применению в широкой области технических приложений.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Общая система определяющих уравнений

Уравнения, используемые для расчета турбулентного теплообмена в условиях прямоточного и закрученного течения несжимаемой жидкости во внутренних системах, из соображений простоты целесообразно дать в тензорной записи. В этом виде *гидродинамическая часть* задачи, включающая уравнения неразрывности, движения и ПРН-ε - модель турбулентности выглядят следующим образом [1,6]:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0; \qquad (1)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}[\mu(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}) - \rho\overline{u_i'u_j'}]; \qquad (2)$$

$$U_j \frac{\partial(\overline{u_i'u_k'})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\nu \frac{\partial(\overline{u_i'u_k'})}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j}[c_s f_\mu \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_j'u_l'}\frac{\partial(\overline{u_i'u_k'})}{\partial x_l}] + P_{ik} - \frac{2\varepsilon}{3k}[(1-f_s)\sigma_{ik}k + \frac{3}{2}(\overline{u_i'u_k'})f_s] + R_{ik}; \qquad (3)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j}[c_s f_\mu \frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_j u'_l}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}] + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P -$$

$$c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k} + c_{\varepsilon 3}\nu \frac{k}{\varepsilon} f_\mu \overline{u'_i u'_j}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_l}; \quad (4)$$

Здесь $P_{ik} = -(\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}), P = -\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}$ - порождение, R_{ik} - член перераспределения, определяемый согласно предложениям по моделированию, $\overline{u'_i u'_k}$ - напряжения Рейнольдса, (—) –обычное (рейнольдсовое) осреднение по времени, ρ,ν- плотность, кинематическая вязкость соответственно, $c_s, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_{\varepsilon 3}$ -постоянные модели; f_μ, f_s - демпфирующие функции.

Следует остановиться на некоторых приемлемых и удачных в описании пристеночных течений в каналах подходах, используемых для замыкания уравнений рейнольдсовых напряжений, содержащих неизвестные члены высших порядков: диффузию скорости и давления (D_{ik}), перераспределения (R_{ik}) и диссипации ($\acute{r}\Gamma_{ik}$).

М1- модель Ханжалика- Лаундера [1].

Данная модель – обобщенная версия модели [7], рекомендованная для потоков с высокими числами Рейнольдса – имеет следующие представления:

$$R_{ik} = R_{ik,1} + R_{ik,2} + R_{ik,w}, \quad (5)$$

$$R_{ik,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} a_{ij}, \quad (6)$$

$$R_{ik,2} = -\frac{(c_2+8)}{11}(P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P) - \frac{(8c_2-2)}{11}(D_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P) -$$

$$\frac{(30c_2-2)}{55}k(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}); \quad (7)$$

$$R_{ik,w} = [c_3 \frac{\acute{r}\Gamma}{k} a_{ij} + c_4(P_{ij} - D_{ij})] f_w(\frac{l}{x_n}), \quad (8)$$

где x_n -расстояние от стенки,

$$f_w = \frac{k^{1.5}}{\varepsilon x_n}, c_1 = 1.5, c_2 = 0.4, c_3 = 0.125, c_4 = 0.015,$$

$$a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k, D_{ij} = -(\overline{u'_i u'_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}).$$

Для диссипативного уравнения принято:

$$f_s = (1 + 0.1\mathrm{Re}_t)^{-1}, \mathrm{Re}_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}, c_\varepsilon = 0.15, c_{\varepsilon 1} = 1.275, c_{\varepsilon 2} = 1.8, c_{\varepsilon 3} = 2.0, \quad (9)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_l})^2, f_\varepsilon = 1.0 - (\frac{0.4}{1.8})\exp(-\frac{\mathrm{Re}_t^2}{36}), f_\mu = \exp(-\frac{3.4}{(1+\mathrm{Re}_t/50)^2}).$$

В настоящей работе, основываясь на идеи [8], турбулентная диффузия в М1 упрощена и отвечает виду, представленному в (3) ($c_s = 0.22$).

М2-модель Сима [2].

С целью улучшения возможностей М1 в предлагаемой модели модифицирована постоянная c_1 в (6):

$$R_{ik.1} = -c_1^\bullet \frac{\varepsilon}{k} a_{ij}, c_1^\bullet = c_1[1 - (1 - \frac{1}{c_1}) f_w], f_w = \exp[-(c_w \mathrm{Re}_{ts})^4], \quad (10)$$

где $c_w = 0.015, \mathrm{Re}_{ts} = \frac{\sqrt{k}x_n}{\nu}$.

Член "быстрых изменений" $R_{ij,2}$ оставлен согласно (7). Член, определяющий влияние стенки на перераспределение определяется следующим образом:

$$R_{ij,w} = [c_{s1}(P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P) + c_{s2}k(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})] f_w,$$

где $c_{s1} = 0.45, c_{s2} = 0.08$.

Моделирование турбулентной диффузии представляется согласно [1] ($c_s = 0.11$). В качестве замыкающего уравнения в М2 используется уравнение (4) вида:

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_j u'_l}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}) + c_{\varepsilon 1}(1 + c_{\varepsilon 3} f_w)\frac{\varepsilon}{k}P -$$

$$c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k} + [(-2 + \frac{7}{9}c_{\varepsilon 2})\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k} - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2k}] f_w, \quad (12)$$

$$c_\varepsilon = 0.15, c_{\varepsilon 1} = 1.8, c_{\varepsilon 2} = 1.35, c_{\varepsilon 3} = 1.0, \ f_\varepsilon = 1 - 0.22\exp(-0.028\mathrm{Re}_t^2),$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_l^2}.$$

М3-модель Элгобаши [3].

Здесь диффузия турбулентности определяется по [8] ($c_s = 0.22$). При аппроксимации ε_{ij} особенности реального поведения нормальных напряжений учитываются видом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} + \overline{u'_i u'_j}\frac{\varepsilon}{k} f_s(1 - \delta_{ij}). \quad (13)$$

ε-уравнение в М3 имеет вид (4) со следующими постоянными и демпфирующими функциями:

$$c_\varepsilon = 0.15, c_{\varepsilon 1} = 1.45, c_{\varepsilon 2} = 1.9, c_{\varepsilon 3} = 2.0, f_\varepsilon = 1 - a_1 \exp(-a_2 \mathrm{Re}_t^2),$$

$$a_1 = 1 - \frac{1.4}{c_{\varepsilon 2}}, a_2 = 0.028.$$

Моделирование перераспределяющего члена выполнено аналогично (5)-(8), где для $R_{ij,w}$ принято

$$c_3 = 0, c_4 \cong 0.123, c_5 = 0.003, f_\mu = \exp(-c_5 \mathrm{Re}_{ts}).$$

В случае ПРН-L- модели уравнения (1) – (3) дополняются еще уравнениями для кинетической энергии турбулентности k и интегрального масштаба турбулентных пульсаций L:

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}[c_s f_\mu \frac{L}{\sqrt{k}}\overline{u'_j u'_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}] + P - c_d \frac{k^{1.5}}{L}$$

$$U_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\nu \frac{\partial L}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j}[c_s f_\mu \frac{L}{\sqrt{k}}\overline{u'_j u'_l}\frac{\partial L}{\partial x_l}] +$$

$$\left(c'_{L1}\frac{L}{k}P^{(r)} + c''_{L1}\frac{L}{k}P^{(i)}\right) + c_{Lf}c_{L2}k^{0.5}\left(1 - \frac{L^2}{s^2}\right), \quad (15)$$

где $P = P^{(r)} + P^{(i)}; P^{(r)}, P^{(i)}$ - касательная и нормальная составляющая P.

Тепловую часть рассматриваемой задачи составляют уравнения: энергии; транспортные уравнения турбулентного потока тепла $\overline{u'_i t'}$, которые с учетом разномасштабности процессов диссипации флуктуаций скорости и температуры замыкаются балансовыми уравнениями автокорреляций пульсаций $\overline{t'^2}$ и ее скорости диссипации ε_t (для простоты записи тепловая часть постановки задачи также представлена в тензорной форме):

$$U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u_j' t'})}{\partial x_j}, \tag{16}$$

$$U_k \frac{\partial \overline{u_i' t'}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}[(\nu + \frac{(a-\nu)}{(n_1+2)}) \frac{\partial \overline{u_i' t'}}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial x_k}[c_{st} f_{\mu t} \frac{k}{\varepsilon}(\overline{u_i' u_l'} \frac{\partial \overline{u_k' t'}}{\partial x_l} + \overline{u_k' u_l'} \frac{\partial \overline{u_i' t'}}{\partial x_l})]$$
$$- \{\overline{u_i' u_k'} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \overline{u_k' t'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\} - (1 - f_{st}) c_{1t} (\frac{\varepsilon}{k}) \overline{u_k' t'} + c_{2t} \overline{u_k' t'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} -$$
$$[c_{1tw} f_{wt} + f_{st} n_k n_i](\frac{\varepsilon}{k}) \overline{u_k' t'} - f_{st} f(\Pr)(\frac{\varepsilon}{k})[\overline{u_i' t'} + \overline{u_k' t'} n_k n_i]; \tag{17}$$

$$U_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\overline{t'^2}}{2}) = \frac{\partial}{\partial x_j}[a \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\overline{t'^2}}{2})] + \frac{\partial}{\partial x_j}[c'_{st} \frac{k}{\varepsilon} f_{\mu t} \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\overline{t'^2}}{2})] - \overline{u_j' t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \varepsilon_T; \tag{18}$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(a \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}[c'_{st} \frac{k}{\varepsilon} f_{\mu t} \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x_k}] - c_{\varepsilon T1} \frac{\varepsilon_T}{\overline{t'^2}} \overline{u_j' t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} -$$
$$c_{\varepsilon T2} \frac{\varepsilon_T}{k} \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - c_{\varepsilon T3} \frac{\varepsilon_T^2}{\overline{t'^2}} - c_{\varepsilon T4}(\frac{\varepsilon}{k}) \varepsilon_T. \tag{19}$$

2.2. Граничные условия и численный метод решения

Численное интегрирования системы (1) - (19) осуществлялось на неравномерных сетках со сгущением узлов у стенки с использованием метода установления, экономичных неявных конечно-разностных схем, имеющих второй порядок точности как по продольной, так и по поперечной координатам с привлечением схем расщепления и метода прогонки. Алгоритм определения поля давления описан в [9].

Краевые условия состоят в задании:
на входе (при $x=x_0$) - $U=U_0$, $V=0$, $k=k_0$, $L=L_0$,

$$\overline{u_i'^2} = a_i k, \text{ где } a_1 = 0{,}96,\ a_2 = 0{,}48,\ a_3 = 0{,}56;$$
$$\overline{u'v'} = \overline{v'w'} = \overline{u'w'} = 0,\ T = T_0,$$
$$\sqrt{\overline{t'^2}} = 0,\ \overline{u't'} = \overline{v't'} = \overline{w't'} = 0,\ \varepsilon_T = 0,$$
$$L_0 = (0{,}1 \div 0{,}3) \cdot R,\ k_0 = \frac{3}{2} Tu_0 U_0^2,\ Tu_0 = 0{,}1\% \div 1\%. \tag{20}$$

на выходе (при $x=x_к$): $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, где

$$\varphi = U, L, k, \overline{u_i' u_j'}, T, \overline{u_i' t'}, \sqrt{\overline{t'^2}}, \varepsilon_T\ (i, j = \overline{1,3}). \tag{21}$$

На плоскости симметрии (при $y=0$): $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, где

$\varphi = U, L, k, T, \overline{t'^2}, \overline{u't'}, \varepsilon_T, \overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$. А также

$$\overline{u'v'} = \overline{v'w'} = \overline{u'w'} = \overline{v't'} = \overline{w't'} = 0. \tag{22}$$

На стенке ($y=h(x)$): $U=V=k=L=\overline{u_i' u_j'}=0$. $T=T_w$

$$\overline{u_i' t'} = 0; \sqrt{\overline{t'^2}} = 0, \varepsilon_T = 0. \tag{23}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

3.1. Данные тестирования моделей

Сравнение результатов расчета отдельных "тонких" параметров течения с опытными данными (например, [9, 10]) в развивающихся потоках в круглых цилиндрических трубах представлено на рис.1(а-г).

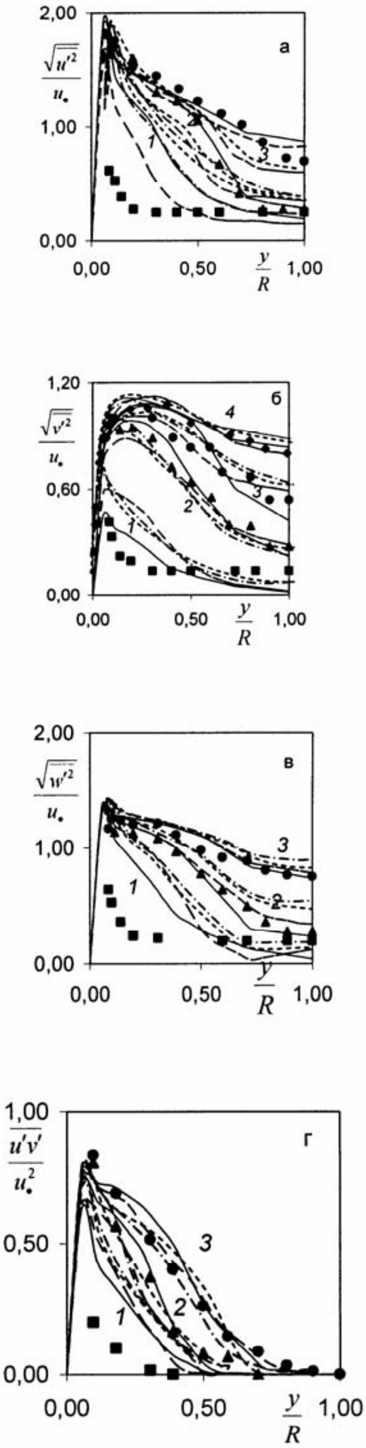

Рис.1. Радиальные распределения рейнольдсовых напряжений во входной области. Здесь линия - расчет [обозначения (—) – ПРН–L, (——) – М1, (- - -) – М2, (— - - —) – М3-модели], значки – данные[10]: 1-x/D=20 (■), 2-30 (▲),

3-50 (●), 4-150 (◆); а – пульсация осевой скорости, б – нормальной, в – тангенциальной компонент; г - касательного напряжения.

Данные расчета показывают, что все модели удовлетворительно описывают течение в области x/D ≥30, однако непосредственно во входной зоне имеется рассогласование. Это связано с ограниченностью экспериментальнах данных - отсутствуют значения ε, k, $\overline{u_i'u_j'}$ на входе. Кроме того из рис.1 следует, что предпочтительнее выглядят модели ПРН-L, ПРН-ε (М3). М1 весьма груба в определении нормальных компонент у стенки (особенно для $\overline{u'^2}$). М2 занижает большой максимум на участке стабилизированного течения на 12%, завышает максимум $\overline{v'^2}$ на 40% относительно данных Лауфера. Отклонение М3 в значениях $\overline{u'^2}$ порядка 8%. Использование L-уравнения в ПРН-модели позволяет наиболее точно раскрыть пристеночную узкую зону течения.

Из результатов следует, что отличие моделей в ядре канала незначительно. Это говорит о слабом влиянии способа аппроксимации $R_{ij,2}$ в данных моделях. У стенки М2, М3 близки, поэтому аппроксимация $R_{ij,w}$ в таких моделях достаточно успешна в описании прямоточных течений. В сравнении с ПРН-L- моделью все модели с ε- уравнением имеют недостаток в оценке $\overline{u'^2}$. Последняя характеристика имеет определяющее значение в пристенном распределении кинетической энергии турбулентности. Более точное описание узкой пристенной зоны на базе ПРН-ε модели должно быть связано с поиском лучших аппроксиаций членов диффузии и перераспределения. Модель Элгобаши имеет преимущества в корректности учета анизотропии течения и эффектов, связанных с малыми числами Рейнольдса. Однако численный алгоритм в этом случае является неэкономичным. Алгоритм, построенный на базе ПРН-L- модели, требует на 50% меньше времени в сравнении с остальными при получении установившегося решения.

В канале со скачком сечения ПРН – L-модель тестировалась на экспериментах П.П. Земаника, Р.С. Дугала [11] и показала удовлетворительное предсказание максимальных значений чисел *Nu*, характеризующих область присоединения (x/H≈8÷10), а также подстройку тепловой структуры к значениям полностью развитого течения в канале, приводящую к монотонному убыванию Nu/Nu_∞ за точкой присоединения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты показывают, что особенности данных течений достаточно корректно можно прогнозировать на основе модели "ПРН-L", учитывающих анизотропный характер турбулентности непосредственно у стенки и позволяющих воспроизводить эффекты смещения зон экстремальной интенсивности пульсаций вглубь потока, распада энергосодержащих вихрей и их восстановление, а также элементы перемежаемости движения.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

М — модель;

ПРН-ε — сокращенное название модели переноса рейнольдсовых напряжений с опорной базой, включающей транспортное ε-уравнение;

ε- скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $м^2/с^3$;

p — давление, $Н/м^2$;

U_i, T — соответственно осредненные по Рейнольдсу компоненты вектора скорости, м/с и температура, К;

u_* — динамическая скорость, м/с;

$\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*, \sqrt{\overline{v'^2}}/u_*, \sqrt{\overline{w'^2}}/u_*, \overline{u'v'}/u_*^2$ — безразмерные значения нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений в осевом, радиальном и тангенциальном направлениях, а также касательного напряжения соответственно;

Индексы:

i, *j* — порядковый номер орта системы координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hanjalic K., Launder B.E.** Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence// Journal of Fluid Mechanics. 1976. V.74. P.593-610.
2. **Сима Н.** Модель напряжений Рейнольдса для течения в пристеночных областях с низкими числами Рейнольдса // Теоретические основы инженерных расчетов. 1988. №4. С.241-251.
3. **Prud'homme M., Elghobashi S.** Prediction of Wall-Bounded Turbulent Flows with an Improved Version of a Reynolds-Stress Model // Proceedings 4th Symposium on Turbulent Shear Flows, Karlsruhe. P. 1.7-1.12
4. **Турбулентные** сдвиговые течения 1/ Под ред. Ф. Дурста и др. М.: Машиностроение. 1982. 432с.
5. **Launder B.E., Morse A.** Numerical Prediction of Axisymmetric Free Shear Flows with a Second –order Reynolds Stress Turbulence Closure / Turbulent Shear Flow. 1979. V.1. P.279-294.
6. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. л. 1987. 840с.
7. **Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.** Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics. 1975. V.68. P.573-566.
8. **Daly B.J., Harlow F.H.** Transport Equations of Turbulence// Physics of Fluids. 1970. V. 13. P.2634-2649.
9. **Бубенчиков А.М., Харламов С.Н.** Математические модели неоднородной анизотропной турбулентности во внутренних течениях. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. 447с.
10. **Веске Д.Р., Стуров Г.Е.** Экспериментальное исследование турбулентного закрученного течения в цилиндрической трубе // Известия СО АН СССР. Серия технических наук. 1972. Вып.3. №13. С.3-7.
11. **Земаник П.П., Дугалл Р.С.** Местный теплообмен за участком резкого расширения круглого канала // Теплопередача. 1970. №1. с.54-64.