

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ АНОМАЛЬНО ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

АННОТАЦИЯ

Разработана математическая модель и проведено численное исследование особенностей течения жидкостей с немонотонной зависимостью вязкости от температуры (аномально термовязкой жидкостей) в цилиндрическом канале. Построены характерные картины установившегося распределения полей физических величин (вязкости, температуры и компонент вектора скорости). Исследовано влияние условий теплообмена на стенках канала на структуру и расходные характеристики течения. Проведено сравнение с результатами, полученными при решении соответствующей плоской задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

При решении классических задач гидродинамики физические параметры, такие как вязкость, теплоемкость и теплопроводность, как правило, считаются постоянными. Но в реальных физических системах процессы переноса в жидкостях зависят от изменения упомянутых параметров от температуры. Одним из определяющих параметров при течениях жидкостей является вязкость, которая существенно влияет на структуру самого течения. Вязкость большинства жидких сред представляет собой монотонно убывающие функции температуры, и такие течения уже достаточно хорошо изучены. Но в природе встречаются вещества, в которых в определенном диапазоне температур могут происходить процессы полимеризации и деполимеризации молекул, а вязкость в этом случае имеет немонотонную зависимость от температуры. К таким веществам относится, например, жидкая сера. В связи с этим возникает необходимость теоретического изучения закономерностей течения жидких сред с реологическими свойствами, подобными жидкой сере.

Впервые некоторые особенности течения жидкой серы в теплообменнике с плоским каналом были отмечены в работе [1]. Задача о течении аномально термовязкой жидкости в плоском канале с граничными условиями первого рода на стенках была рассмотрена в работе [2]. Показано, что основное влияние на структуру потока оказывает область с высокой вязкостью, названная авторами «вязкий барьер», а также изучены основные закономерности течения в зависимости от вида немонотонной зависимости и внешних условий. В статье [3] изучены основные закономерности течения слоя термовязкой жидкости в плоском канале теплообменника и установлены причины образования «по-

рога», как локализованной деформации на границе слоя аномально термовязкой жидкости. Выявлено влияние толщины слоя термовязкой жидкости и интенсивности теплообмена через стенки канала на величину и форму «порога».

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ламинарное течение несжимаемой аномально термовязкой жидкости в цилиндрическом канале диаметра D и длины L , происходящее под действием фиксированного перепада давления Δp . Жидкость втекает в канал с постоянной по сечению температурой $T_{\text{вх}}$, а стенка канала имеет температуру $T_{\text{ст}}$ (для определенности будем считать, что $T_{\text{вх}} > T_{\text{ст}}$).

Для построения математической модели введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом в центре входного сечения канала и осью z направленной вдоль оси канала. Сделаем следующие упрощающие предположения:

- течение является осесимметричным;
- массовые силы отсутствуют;
- коэффициент теплопроводности и теплоемкость жидкости постоянны.

Пусть аномально термовязкая жидкость имеет следующую модельную немонотонную зависимость кинематической вязкости от температуры:

$$\nu(T) = \nu_{\min} \left(1 + A e^{-B(T-T_*)^2} \right),$$

где $A = \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} - 1$ – параметр, характеризующий

отношение максимального и минимального значений вязкости, $B > 0$ – параметр, характеризующий степень заполненности данного температурного диапазона аномалией вязкости (его увеличение свидетельствует о сужении диапазона температур, на котором происходит немонотонное изменение вязкости), $T_* = \frac{T_{\text{ст}} + T_{\text{вх}}}{2}$ – температура, при которой жидкость имеет максимальную вязкость.

На стенке канала для температуры используем граничные условия первого и третьего рода:

- стенка канала поддерживается при постоянной температуре

$$T|_{r=R} = T_{\text{ст}};$$

- на стенке канала задается конвективный теплообмен с окружающей средой согласно закону Ньютона-Рихмана

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h^* (T_{\text{ст}} - T).$$

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\tilde{r} = \frac{r}{D}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{L/w_0}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{w_0}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{w_0},$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \tilde{T} = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_{\text{вх}} - T_{\text{ст}}}, \quad \tilde{v} = \frac{v - v_{\text{min}}}{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}.$$

Тогда система уравнений математической модели, состоящая из уравнения неразрывности, уравнений сохранения количества движения и уравнения сохранения энергии, записывается в виде (значок «тильда» над безразмерными переменными опустим):

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(\varepsilon rw)}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(ru^2 - \frac{r(1+Av)}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon wu - \frac{\varepsilon^2(1+Av)}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -Eu \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{(1+Av)}{\text{Re}} \frac{u}{r^2},$$

$$\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(ruw - \frac{r(1+Av)}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon w^2 - \frac{\varepsilon^2(1+Av)}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\varepsilon Eu \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(ruT - \frac{r}{\text{Pe}} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon wT - \frac{\varepsilon^2}{\text{Pe}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0,$$

Безразмерные граничные условия, при которых решалась задача, имеют следующий вид:

- во входном сечении канала
- $$p|_{z=0} = 1, \quad T|_{z=0} = 1;$$

- в выходном сечении канала
- $$p|_{z=1} = 0;$$

- на стенке канала

$$u|_{r=1} = w|_{r=1} = 0,$$

$$T|_{r=1} = 0 \text{ или } \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = \text{Bi} \cdot T,$$

где безразмерное число Био Bi , характеризует интенсивность теплообмена на стенке канала.

Отметим, что граничное условие первого рода может быть получено как предельный случай граничного условия третьего рода, когда число Био стремится к бесконечности. С физической точки зрения это соответствует заданию максимально возможного теплообмена на стенках канала.

Для численного решения уравнений математической модели применялся метод контрольного объема с использованием алгоритма SIMPLE [4], модифицированного для учета переменного коэф-

фициента вязкости. Для решения полученных систем алгебраических уравнений использовался метод переменных направлений. Численный метод решения системы уравнений математической модели был протестирован путем сравнения с точными аналитическими решениями.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведенные численные исследования течения anomalно термовязкой жидкости в цилиндрическом канале с осевой симметрией показали, что распределения полей физических величин (вязкости, температуры, давления и компонент вектора скорости) имеют структуру аналогичную течению в плоском канале. Процесс течения также определяется характером преодоления жидкостью зоны немоного изменения вязкости – «вязкого барьера», который является устойчивым образованием, локализованным в пространстве.

На рис. 1–6 показаны результаты численных расчетов, проводившихся при следующих значениях безразмерных параметров, которые были подобраны таким образом, чтобы «вязкий барьер» целиком умещался в пределах канала:

$$\varepsilon = 0.01, \quad A = 100, \quad B = 0.01,$$

$$\text{Re} = 200, \quad \text{Eu} = 8, \quad \text{Pe} = 1960.$$

Для удобства анализа графических результатов введем относительные радиальную и осевую скорости

$$u_{\text{отн}} = \frac{u}{u_{\text{max}}}, \quad w_{\text{отн}} = \frac{w}{w_{\text{max}}}$$

и относительный расход

$$Q_{\text{отн}} = \frac{1}{Q_0} \int_S w dS,$$

где Q_0 – безразмерный расход жидкости при пуазейлевском течении с постоянным коэффициентом вязкости v_{min} . Отметим, что осевая компонента скорости w , используемая при вычислении относительного расхода, также является безразмерной.

На рис. 1 и 3 показаны изолинии относительных компонент скорости, температуры и вязкости, а также линии тока при установившемся течении anomalно термовязкой жидкости. Рис. 1 соответствует случаю граничных условий первого рода ($\text{Bi} \rightarrow \infty$), а рис. 2 – случаю граничных условий третьего рода ($\text{Bi} = 1$).

Наглядное представление об образующемся в канале «вязком барьере» можно получить из рис. 2 и 4, на которых показаны некоторые изоповерхности вязкости и их сечение двумя взаимноперпендикулярными плоскостями.

Сравнение температурных полей на рис. 1 и 3 свидетельствует о том, что при втекании нагретой жидкости в канал с максимально интенсивным теплообменом на стенках ($\text{Bi} \rightarrow \infty$) степень охлаждения жидкости оказывается меньше, чем в канале

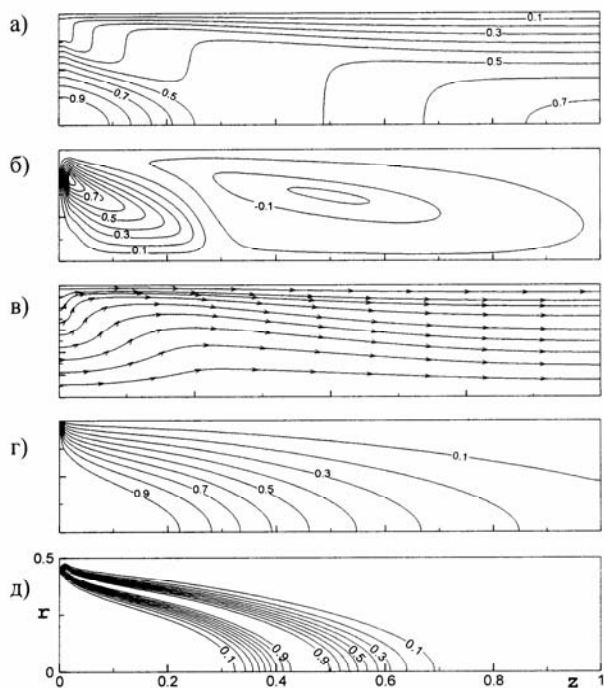


Рис. 1. Установившиеся распределения относительной осевой (а) и радиальной (б) скоростей, линий тока (в), температуры (г) и вязкости (д) для граничных условий первого рода ($Bi \rightarrow \infty$).

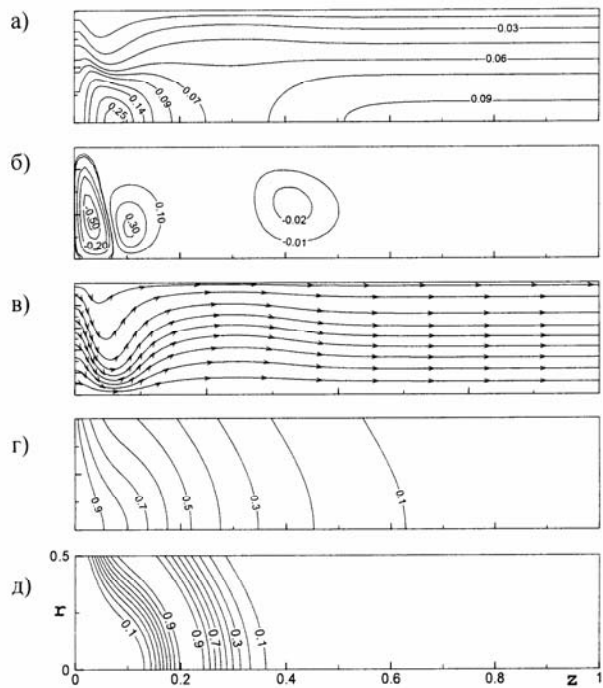


Рис. 3. Установившиеся распределения относительной осевой (а) и радиальной (б) скоростей, линий тока (в), температуры (г) и вязкости (д) для граничных условий третьего рода ($Bi = 1$).

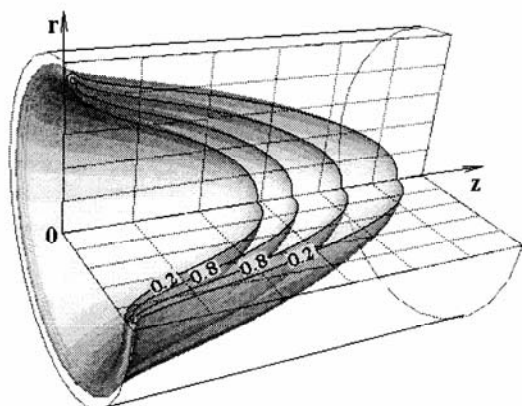


Рис. 2. Установившиеся изоповерхности вязкости в области «вязкого барьера» для граничных условий первого рода ($Bi \rightarrow \infty$).

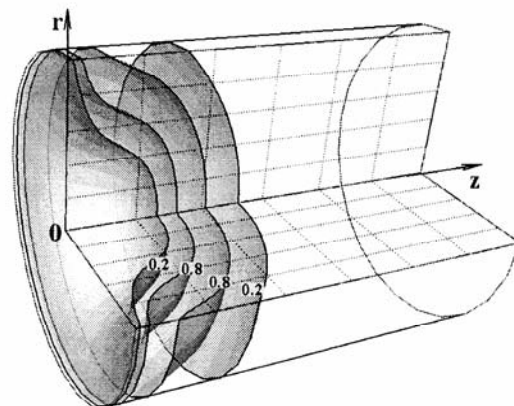


Рис. 4. Установившиеся изоповерхности вязкости в области «вязкого барьера» для граничных условий третьего рода ($Bi = 1$).

с конечным теплообменом ($Bi = 1$). Этот результат объясняется разницей в скоростях течения.

Причина замедления течения аномально термо-вязкой жидкости в случае конечного теплообмена заключается в характере формирующегося вязкого барьера. Если температура жидкости вблизи стенок равна температуре стенок в случае граничных условий для температуры первого рода, то вязкий барьер имеет «подковообразную» форму (рис. 1, д). Это означает, что зона аномально высоких значений вязкости удалена от стенок канала, и динамическое взаимодействие жидкости со стенками при протекании жидкости осуществляется при значениях вязкостей, находящихся вне зоны аномалии на всем протяжении канала. При граничных условиях третьего рода представленная на рис. 3, д зона аномальной вязкости пересекает все поперечное сече-

ние канала и имеет практически постоянную ширину. Изолинии вязкости имеют небольшую кривизну, что связано с типом граничных условий для температуры. Таким образом, при конечном теплообмене взаимодействие аномальной зоны со стенками канала приводит к возникновению больших напряжений сдвига и, как следствие, значительному уменьшению скорости потока.

Обнаружено, что в некотором диапазоне чисел Био изменение расхода жидкости перед выходом на некоторое стационарное значение сопровождается колебаниями, обусловленными квазипериодическим изменением параметров вязкого барьера.

Для рассматриваемой задачи представляет значительный интерес исследование вопроса о том, как влияет изменение условий теплообмена на стенках канала на динамику изменения расходных

характеристик потока в зависимости от времени. Проведенные численные исследования выявили несколько различных режимов установления потока в зависимости от значения числа Био.

В частности, при умеренном теплообмене перед выходом на некоторое стационарное значение, величина относительного расхода испытывает несколько затухающих колебаний (рис. 5). Максимумы и минимумы относительного расхода соответствуют уменьшению и увеличению области вязкого барьера.

Зависимость относительного расхода от числа Био для фиксированного перепада давления показана на рис. 6. При увеличении интенсивности теплообмена, характеризуемого числом Био, происходит непрерывное увеличение относительного расхода до значений, соответствующих расходу при максимально возможном теплообмене.

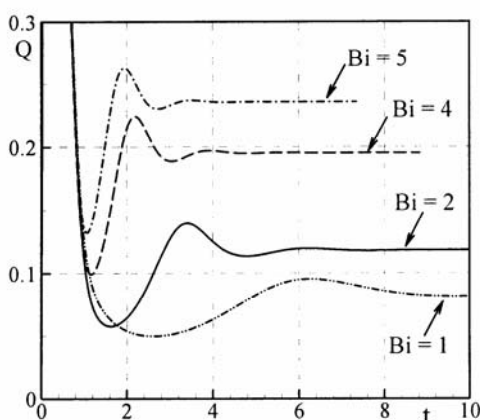


Рис. 5. Зависимость относительного расхода от времени для различных режимов теплообмена.

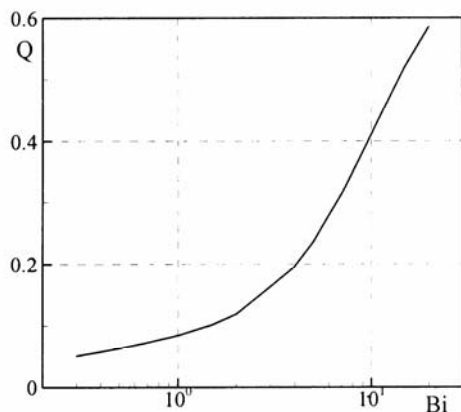


Рис. 6. Зависимость относительного расхода от числа Био для фиксированного перепада давления.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследований течения модельной жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в цилиндрическом канале свидетельствуют о многообразии возможных гидродинамических эффектов. Основной особенностью термогидродинамики anomalously термовязких сред, как установлено представленным исследованием, является образование локализованной области –

«вязкого барьера», который в значительной мере способен влиять на структуру потока. Представляется интересным обнаружение зависимости режима установления течения anomalously термовязких жидкости от интенсивности теплообмена на стенках канала.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

A, B — параметры anomalously зависимости вязкости от температуры;

$Bi = \frac{Dh^*}{\lambda}$ — безразмерное число Био;

c — удельная теплоемкость жидкости, Вт/К;
 D — диаметр канала, м;

$Eu = \frac{p_0}{\rho w_0^2}$ — безразмерное число Эйлера;

h^* — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К);

L — длина канала, м;

p — давление, Н/м²;

$Pe = \frac{Dw_0}{\alpha}$ — безразмерное число Пекле;

R — радиус канала, м;

$Re = \frac{Dw_0}{v_{min}}$ — безразмерное число Рейнольдса;

S — поперечное сечение канала, м²;

T — температура, К;

t — время, с;

u — радиальная компонента скорости, м/с;

w — осевая компонента скорости, м/с;

$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ — коэффициент температуропроводности, м²/с;

Δp — перепад давления, Н/м²;

$\varepsilon = \frac{D}{L}$ — безразмерный параметр, характеризующий

геометрию канала;

λ — коэффициент теплопроводности жидкости, Вт/(м·К);

ρ — плотность жидкости, кг/м³;

ν — кинематическая вязкость жидкости, м²/с.

Индексы:

0 — характерное значение;

min, max — минимальное и максимальное значение;

vx — значение во входном сечении канала;

отн — относительное значение;

ст — значение на стенке канала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Urmancheev S.F., Kireev V.N., Larionov S.I., Obukhova S.A.** A Numerical investigation of anomalously viscous liquid flowing along the heat exchanger channel // Proceeding of the Third International Conference on Multiphase Flow. Lyon. 1998. Paper № 375. 6 P.
2. **Урманчев С.Ф., Киреев В.Н.** Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396. №2. С. 204-207.
3. **Киреев В.Н., Хизбуллина С.Ф., Урманчев С.Ф.** Моделирование течения слоя жидкой серы в канале теплообменника // Нефтегазовое дело. 2005. Т. 3. С. 333-338.
4. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984, 152 с.