УДК 532.542.3

П.Т. Зубков[1], *Г.М. Шёлковый*[2], *О.А. Якимова*[2]

Тюменский Государственный Университет, Тюмень, Россия (1)
Тюменский Филиал Института Теоретической и Прикладной Механики СО РАН, Тюмень, Россия (2)

ВЛИЯНИЕ ПОДОГРЕВАЕМОЙ ВСТАВКИ НА ТЕЧЕНИЕ В ТРУБЕ

АННОТАЦИЯ

Численно исследуется влияние подогреваемой вставки в центре трубы на течение жидкости. Найдено, что с увеличением температуры на вставке, потери на перекачку изменяются нелинейно. Это позволяет найти такую температуру, при которой потери будут минимальны.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное течение жидкости (например, масла) в круглой трубе. Если течение ламинарное, то имеется аналитическое решение. Если течение турбулентное, то, применяя модель турбулентности (например, $k-\varepsilon$ модель Лаундера-Шарма [1]) в одномерном осесимметричном случае, снова получаем стабилизированное решение, которое описывает полностью развитое турбулентное течение. Добавим теперь в трубу одну вставку (см. рис. 1), считая при этом, что до вставки уже имеем стабилизированное течение, ламинарное или турбулентное. Очевидно, что вставка увеличит потери на перекачку. Таким образом, возникает задача: исследовать, как влияет вставка на перекачку. В турбулентном случае добавление вставки приводит к уменьшению вязкости после вставки, т.к., в соответствии с моделью турбулентности, вязкость складывается из ламинарной и турбулентной, и турбулентная вязкость около неподвижных границ равна нулю. А вставка как раз и увеличивает площадь неподвижных границ. При этом т.к. вязкость уменьшается, то ожидается, что вставка уменьшит потери при перекачке. Также исследуется влияние подогрева вставки на турбулентные характеристики, т.к. с увеличением температуры вязкость уменьшается. Это может привести к уменьшению потерь. В то же время, турбулентные характеристики могут и увеличиться, и тогда потери возрастут.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача рассматривается в осесимметричной двухмерной постановке, когда все характеристики зависят от продольной координаты x и радиуса r. Турбулентное течение описывается, в силу выбранной модели, следующими уравнениями.

$$\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\partial rv}{\partial r}=0\,,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\mu+\mu_t\right)\frac{\partial v}{\partial r}\right)-S\,,$$

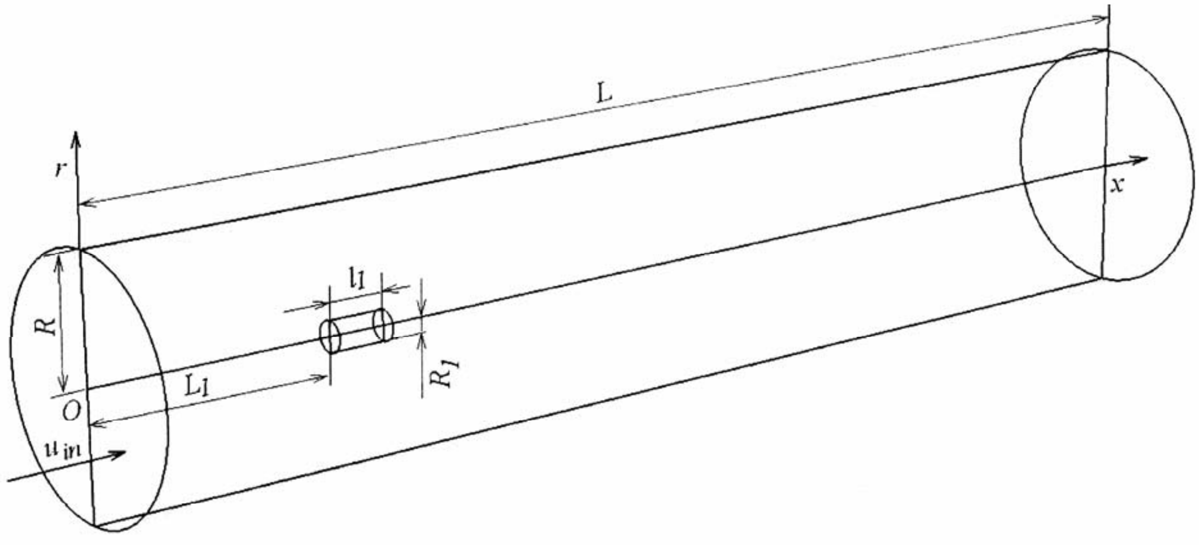

Рис. 1. Постановка задачи.

$$\rho\left(u\frac{\partial K}{\partial x}+v\frac{\partial K}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial r}\right)+\mu_t G-\rho\varepsilon-D\,,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)+c_1 f_1 c_\mu f_\mu \rho K G-\frac{c_2 f_2 \rho\varepsilon^2}{K}+E\,,$$

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(k+\frac{c\mu_t}{\Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(k+\frac{c\mu_t}{\Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

где $\mu_t=\dfrac{c_\mu f_\mu \rho K^2}{\varepsilon}$ - турбулентная вязкость, $S=2\dfrac{(\mu+\mu_t)v}{r^2}$, $G=2\left(\dfrac{v}{r}\right)^2+2\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)^2+2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2$,

$$D=2\mu\left[\left(\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial x}\right)^2\right],\ E=\frac{2\mu\mu_t}{\rho}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial x}\right)^2\right],$$

$c_\mu=0.09$, $c_1=1.44$, $c_2=1.92$, $\sigma_K=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $\Pr_t=0.9$ - эмпирические константы,

$f_\mu=\exp\left(-\dfrac{3.4}{\left(1+\mathrm{Re}_t/50\right)^2}\right)$, $f_1=1$, $f_2=1-0.3\exp\left(-\mathrm{Re}_t^2\right)$ - эмпирические функции, $\mathrm{Re}_t=\dfrac{\rho K^2}{\mu\varepsilon}$ - турбулентное число Рейнольдса.

Начальное приближение для температуры $T_0=T_{in}$.

Граничные условия $T|_{x=0}=T_{in}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $\left.\dfrac{\partial K}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $\left.\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=0$, $u|_{r=R}=0$, $v|_{r=R}=0$, $K|_{r=R}=0$, $\varepsilon|_{r=R}=0$, $T|_{r=R}=T_w$.

Начальные приближения и граничные условия для остальных переменных при $x=0$ берутся из стабилизированного течения, которое является решением одномерной задачи

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r(\mu+\mu_t)\frac{du}{dr}\right)=\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_K}\right)\frac{dK}{dr}\right)+\mu_t G-\rho\varepsilon-D=0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dr}\right)+c_1 f_1 c_\mu f_\mu \rho K G-$$
$$-\frac{c_2 f_2\rho\varepsilon^2}{K}+E=0$$

с граничными условиями

$$u|_{r=R}=0\,,K|_{r=R}=0\,,\varepsilon|_{r=R}=0\,.$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Задача считалась численно с помощью метода контрольного объёма и алгоритма SIMPLER [2]. Использовалась равномерная сетка в 2560×64 контрольных объёмов по x и r соответственно. Расчёты проводились с помощью релаксаций.

Вначале решалась одномерная задача, задавалось число Рейнольдса Re. Начальное приближение градиента давления вычислялось по формуле $\dfrac{dp}{dx}=-\dfrac{8\,\mathrm{Re}\,\mu^2}{\rho R^3}$, что соответствует аналитическому решению для ламинарного случая. Начальное приближение для скорости выражалось из формулы для числа Рейнольдса $u_0=\dfrac{\mu\,\mathrm{Re}}{\rho R}$. Начальное приближение для k и ε бралось в виде $K=\mathrm{c_K u_0^2}$, $\varepsilon=c_\varepsilon\dfrac{u_0^3}{R}$, где $c_K=5\cdot10^{-3}$, $c_\varepsilon=2.5\cdot10^{-4}$ - эмпирические константы.

Далее решалась система уравнений, и получалось некоторое распределение скорости. По формуле $\mathrm{Re}_{num}=\dfrac{2}{R\mu}\int\limits_0^R\rho u r dr$ получалось число Рейнольдса и сравнивалось с заданным $f=\dfrac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}_{num}}$. Т.к. скорость пропорциональна числу Рейнольдса, то, умножив её на f, сразу получим заданное число Рейнольдса. Но при этом $\dfrac{dp}{dx}$ не соответствует такой скорости, поэтому мы и его умножаем на f и снова повторяем всю процедуру, пока не получим сошедшегося решения.

Затем полученное решение одномерной задачи мы используем для задания начального приближения и граничных условий для двухмерной задачи.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Все результаты приведены в безразмерном виде.

Таблица 1. Сравнение потерь

Re	$T_h = 40$	$T_h = 80$	$T_h = 120$	$T_h = 160$
1000	1.07071E+00	1.06675E+00	1.09841E+00	1.11741E+00
2000	1.03323E+00	1.03284E+00	1.04818E+00	1.04640E+00

Для сравнения потерь при различных режимах используется $e = \dfrac{\left(p|_{x=0} - p|_{x=L}\right)/L}{-\dfrac{dp}{dx}}$ - отношение осреднённого градиента давления к градиенту давления из одномерного случая (т.е. без вставки). Из таблицы 1 видно, что увеличение температуры приводит к нелинейному изменению потерь. При $T_h = 80\,°C$ потери меньше, чем при $40\,°C$ (т.е. когда теплофизические характеристики постоянны), а при $120\,°C$ – больше, чем при $40\,°C$. Это можно объяснить, например, так. При увеличении температуры вязкость уменьшается, следовательно, уменьшается трение, а, значит, и потери. С другой стороны, при этом увеличивается турбулентная вязкость, а с ней и трение, и потери. Таким образом, возникает баланс между уменьшением ламинарной вязкости и увеличением турбулентной вязкости. При $T_h = 80°C$ уменьшение ламинарной вязкости оказывается более значительным, чем увеличение турбулентной, а при $120\,°C$ – наоборот.

Поведение турбулентной вязкости вдоль трубы над вставкой ($r = R_1$) показано на рис. 2. Видно, что с увеличением температуры турбулентная вязкость увеличивается. При этом именно для $T_h = 80\,°C$ вязкость после вставки минимальна.

Рис. 3 показывает, что для данного числа Рейнольдса над вставкой существует вихрь, который тоже может увеличивать потери на перекачку жидкости.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$R = 0.05$, *м* — радиус трубы,

$L = 40R = 2$, *м* — длина трубы,

$R_1 = \dfrac{R}{8} = 0.00625$, *м* — радиус вставки,

$l_1 = 4R_1 = 0.025$, *м* — длина вставки,

$L_1 = 4R = 0.2$, *м* — положение вставки,

$\rho = 868.2\ \dfrac{кг}{м^3}$ — плотность жидкости,

$\mu = 8.94 \cdot 10^{-3} \exp\left[-2.1743 \cdot 10^{-2}\left(T - T_{in}\right)\right] Па \cdot с$ — вязкость жидкости,

$c = 1788 + 5.9125\left(T - T_{in}\right)\ \dfrac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость жидкости,

$k = 0.109 + 8.5 \cdot 10^{-5}\left(T - T_{in}\right)\ \dfrac{Вт}{м \cdot °C}$ — теплопроводность жидкости,

$\rho_h = 7800\ \dfrac{кг}{м^3}$ — плотность вставки,

$c_h = 800\ \dfrac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость вставки,

$k_h = 50\ \dfrac{Вт}{м \cdot °C}$ — теплопроводность вставки,

$T_{in} = 40°C$ — температура на входе,

$T_w = 40°C$ — температура на границе,

температура T_h на вставке менялась от 40 до 120 $°C$,

x, *м* — продольная координата,

r, *м* — радиус,

u, $\dfrac{м}{с}$ — составляющая скорости вдоль продольной оси,

v, $\dfrac{м}{с}$ — составляющая скорости вдоль радиуса,

p, *Па* — давление,

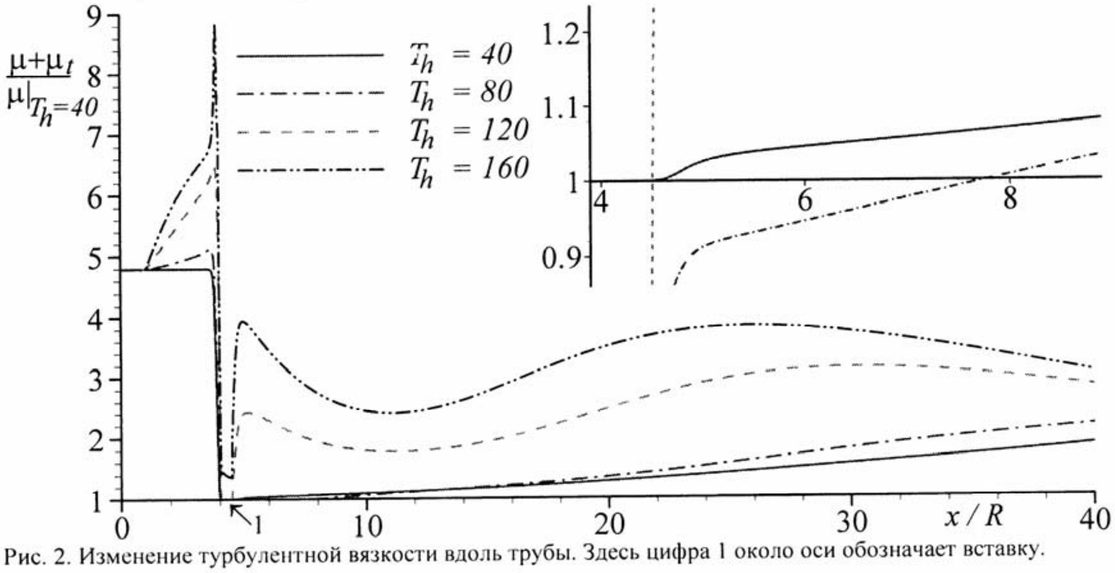

Рис. 2. Изменение турбулентной вязкости вдоль трубы. Здесь цифра 1 около оси обозначает вставку.

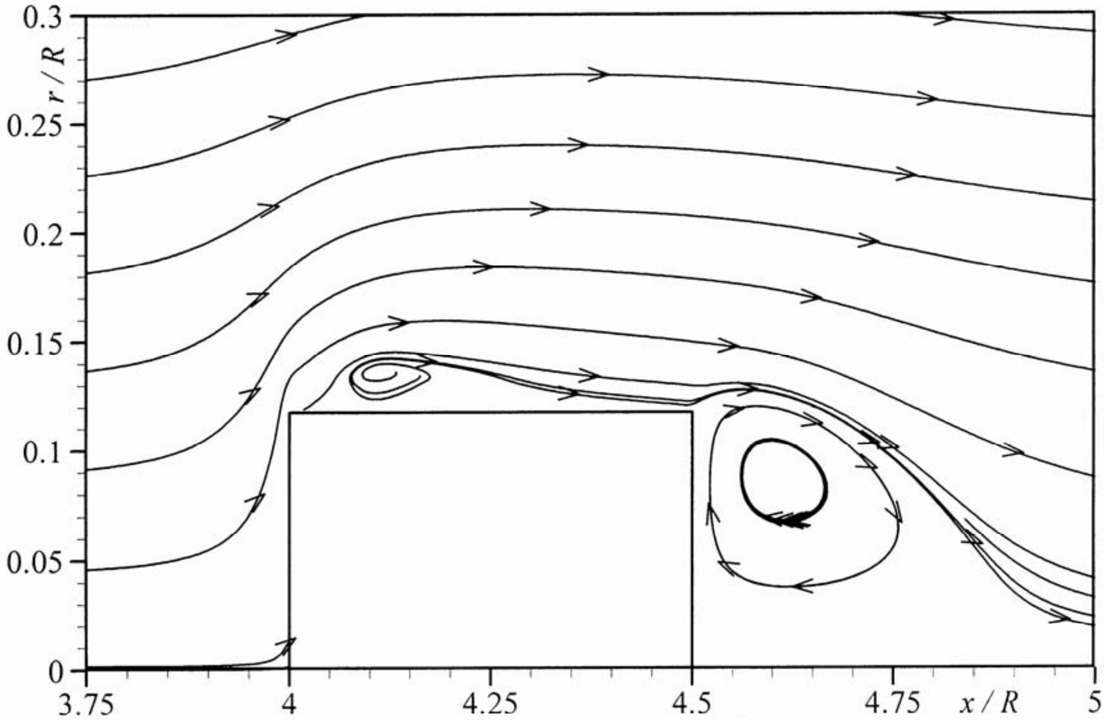

Рис. 3. Функция тока около вставки при турбулентном течении, Re=2000, $T_h = 80$.

μ_t, $Па \cdot с$. — турбулентная вязкость,

K, $\frac{м^2}{с^2}$, — кинетическая энергия турбулентных пульсаций,

ε, $\frac{кг \cdot м}{Па \cdot с^5}$ — диссипация турбулентной кинетической энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Launder B.E. and Sharma B.I.** Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. // Lett. Heat Mass Transfer, 1974, v. 1. P. 131 - 138.
2. **Patankar S.V.** Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere, 1980. 200 p. (Им. рус. перевод: **Патанкар С.В.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.)