

Г.С. Журавлева<sup>1</sup>, Н.Н. Пилюгин<sup>2</sup>Институт математики, экономики и информатики  
Иркутского государственного университета, Россия (1)

Институт механики Московского государственного университета, Россия (2)

**ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ  
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ****АННОТАЦИЯ**

Рассматривается гиперзвуковое обтекание затупленных осесимметричных тел, вращающихся вокруг продольной оси, потоком вязкого сжимаемого газа. Предполагается, что с поверхности тела производится вдув газа. Решение задачи получено конечно-разностным методом в широком диапазоне чисел Рейнольдса и параметра вращения.

Проведены расчеты обтекания параболоидов и исследуется зависимость распределения теплового потока и аэродинамических характеристик для случая постоянного по обводу тела вдува.

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Рассмотрим обтекание гладкого затупленного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, гиперзвуковым неравномерным потоком вязкого газа. Система уравнений вязкого ударного слоя получается из осредненных уравнений Навье-Стокса [1,2]. В безразмерных переменных в системе криволинейных координат  $x, y, \vartheta$ , неподвижной в пространстве, уравнения имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho r_w u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho r_w v) &= 0, \\ \rho \left( Du - \frac{\sin \alpha}{r_w} w^2 \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_\Sigma}{K} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho \left( Dw + \frac{\sin \alpha}{r_w} uw \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_\Sigma}{K} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \rho \left( ku^2 + \frac{\cos \alpha}{r_w} w^2 \right) &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho Dc &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_\Sigma}{Sc_\Sigma K} \frac{\partial c}{\partial y} \right), \\ \rho Dh &= 2\varepsilon u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\mu_\Sigma}{K} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_\Sigma}{\sigma_\Sigma K} \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu_\Sigma}{K} \left( \frac{1}{\sigma_\Sigma} - \frac{1}{Sc_\Sigma} \right) (c_{p2} - c_{p1}) T \frac{\partial c}{\partial y} \right], \\ p &= \rho T, \quad \mu = T^\omega, \end{aligned} \quad (1)$$

$$D = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad K = \varepsilon \text{Re}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma},$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}, \quad \mu_0 = \mu(T_0) = T_0^\omega,$$

$$T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_p}, \quad \sigma_\Sigma = \frac{\mu_0 \mu_\Sigma c_p}{\lambda_\Sigma}, \quad Sc_\Sigma = \frac{\mu_0 \mu_\Sigma}{\rho D_\Sigma},$$

$$h = (cc_{p2} - (1-c)c_{p1})T, \quad c_v = cc_{v2} - (1-c)c_{v1}.$$

Здесь  $x$  определяет расстояние вдоль образующей тела, измеренное от критической точки;  $y$  - расстояние по нормали к поверхности тела,  $uV_\infty, vV_\infty$  - компоненты вектора скорости, соответствующие осям  $x, y$ ;  $\rho_\infty V_\infty^2 p, \varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho, T_0 T, h_0 h, c_p, c_v$  - соответственно давление, плотность, температура, энтальпия, удельные теплоемкости газовой смеси при постоянном давлении и объеме;  $\mu_0 \mu_\Sigma, \lambda_\Sigma, D_\Sigma$  - коэффициенты полных вязкости, теплопроводности и диффузии;  $c$  - массовая концентрация вдуваемого газа;  $k$  - продольная кривизна поверхности тела. Все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру  $R_0$ , нормальная координата - к  $\varepsilon R_0$ , в качестве  $R_0$  выбирался радиус кривизны затупления тела при  $x = 0$ . Индекс  $w$  относится к величинам на поверхности тела, индекс  $\Sigma$  обозначает суммарные коэффициенты, обусловленные молекулярным и турбулентным переносом. Индекс 1 относится к компоненте внешнего потока, 2 - к вдуваемой компоненте. Влиянием термодиффузии пренебрегаем, так как рассматриваются случаи умеренных градиентов температуры.

Набегающий поток сжимаемого газа представляет собой осесимметричное сдвиговое течение типа следа [4,5]

$$\begin{aligned} V_1(r) &= 1 - a \exp(-br^2), \\ \rho_1(r) &= B[1 + C(1 - dV_1^2)]^{-1}, \\ p_1(r) &= \text{const}, \quad c_1(r) = 0, \\ B &= 1 + C(1 - d), \quad d = (1 - a)^{-2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $V_\infty V_1$ ,  $\rho_\infty \rho_1$ ,  $\rho_\infty V_\infty^2 \rho_1$ ,  $c_1$  - соответственно скорость, плотность, давление и концентрация в набегающем потоке;  $R_0 r$  - расстояние до оси симметрии потока;  $a$ ,  $b$ ,  $C$  - параметры, характеризующие неравномерность набегающего потока;  $V_\infty$ ,  $\rho_\infty$  - скорость и плотность газа при  $r \rightarrow \infty$ . Обтеканию тела равномерным потоком газа соответствует  $a = 0$ .

На ударной волне ( $y = y_s(x)$ ) будем задавать обобщенные условия Рэнкина-Гюгонио, которые в сверхзвуковом приближении при неравномерном обтекании имеют вид [6,7]

$$\begin{aligned} \rho \left( v - u \frac{dy_s}{dx} \right) &= \rho_1 V_1 v_\infty, \quad p = \rho_1 V_1^2 v_\infty^2, \\ \rho_1 V_1 v_\infty (u - V_1 u_\infty) &= \frac{\mu_\Sigma}{K} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \rho_1 V_1 v_\infty w &= \frac{\mu_\Sigma}{K} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \rho_1 V_1 v_\infty c &= \frac{\mu_\Sigma}{Sc_\Sigma K} \frac{\partial c}{\partial y}, \\ \rho_1 V_1 v_\infty (T + u^2 + w^2 - V_1^2) &= \frac{\mu_\Sigma}{\sigma_\Sigma K} \frac{\partial T}{\partial y} + \\ &+ \frac{2\mu_\Sigma}{K} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $u_\infty = \cos \alpha$ ,  $v_\infty = -\sin \alpha$ ,  $\alpha$  - угол между касательной к поверхности тела и осью симметрии.

На поверхности тела ( $y = 0$ ) зададим условие прилипания для продольной составляющей скорости, расход газа, значение азимутальной скорости, условие для концентрации вдуваемого газа и температуру стенки

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \rho v &= G(x), \quad w = Br_w(x), \\ \rho v(1-c) &= -\frac{\mu_\Sigma}{Sc_\Sigma K} \frac{\partial c}{\partial y}, \quad T = T_w(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $G(x) = \frac{\rho_w v_w}{\rho_\infty V_\infty}$ ,  $B = \frac{\Omega R}{V_\infty}$ ,  $\Omega$  - постоянная угловая скорость вращения поверхности тела вокруг оси симметрии.

Для замыкания системы уравнений (1)-(4) используется алгебраическая модель для коэффициентов переноса [3, 8]

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение уравнений (1-4) проводится в переменных типа Доронницына [9]

$$x = \xi, \quad \eta = \frac{1}{\Delta} \int_0^y \rho dy, \quad \zeta = \vartheta, \quad \Delta = \int_0^{y_s} \rho dy,$$

$$\psi = r_w^V \Delta u_* f_1, \quad u = u_*(\xi) \frac{\partial f_1}{\partial \eta}, \quad (5)$$

$$w = w_*(\xi) \frac{\partial f_2}{\partial \eta}, \quad c = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad T = T_*(\xi) \theta.$$

Здесь  $\psi$  - функция тока. Функции  $u_*(\xi)$ ,  $w_*(\xi)$  в расчетах принимались равными  $u_\infty$ , при этом особенности, возникающие в коэффициентах уравнений при  $\xi = 0$ , разрешаются;  $T_*(\xi)$  полагалось равным  $v_\infty^2$ .

Численное решение получено с помощью неявной конечно-разностной схемы [10], имеющей четвертый порядок точности по нормальной координате к поверхности, первый - по продольной и поперечной. Нелинейная система разностных уравнений решалась с применением итераций, при этом линеаризованные уравнения решались поочередно прогонкой. Для определения продольной составляющей градиента давления четвертое уравнение системы (1), записанное в переменных (5) дифференцировалось по переменной  $\xi$ . В результате для градиента давления получилось обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, которое интегрировалось на каждой итерации от ударной волны до тела с применением квадратурной формулы Симпсона. Аналогичным образом интегрировалось и уравнение для давления. В качестве начального приближения на критическом луче задавались линейные профили компонент скорости, концентрации и температуры. На всех последующих лучах исходные значения параметров брались с предыдущего слоя. Выход из итерационного цикла осуществлялся по условию, что отличие всех профилей и параметра  $\Delta$  на данной итерации от предыдущей не превосходит  $10^{-4}$ .

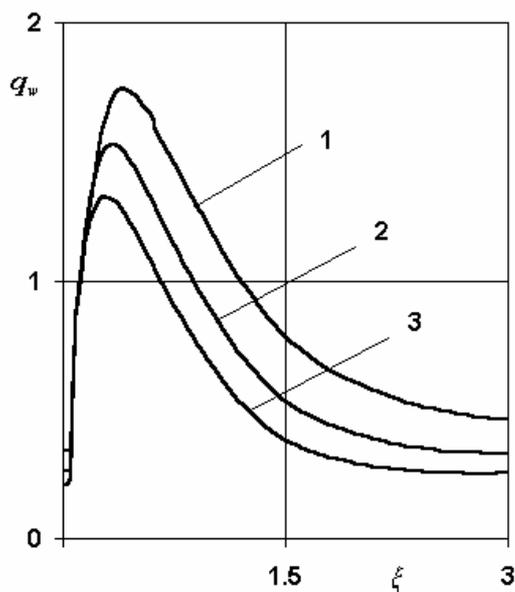
## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Расчеты течений около вращающихся параболоидов выполнялись при следующих параметрах задачи:  $a = 0,02$ ;  $b = 2,6$ ;  $C = 4$  - безразмерные параметры набегающего потока;  $Re = 10^6 \div 7 \cdot 10^6$ ;  $B = 0 \div 1,5$ ;  $\sigma = 0,7$ ;  $\sigma_T = 0,9$ ;  $Sc = 0,7$ ;  $Sc_T = 0,9$ ;  $T_w = 0,15$ ;  $\omega = 0,5$ ;  $\gamma = 1,417$  (вдув гелия);  $G(x) = 0,001$ .

Уравнение образующей тела в цилиндрической системе координат, связанной с носком тела, имеет вид  $r^2 = 2pz$ ,  $p$  - параметр. Изменением параметра  $p$  можно менять эффективный раствор параболоида.

Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 1-4.

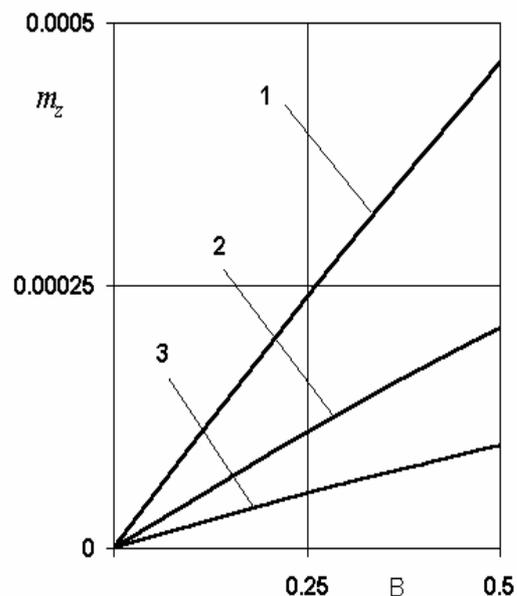
Расчеты обтекания параболоидов показывают, что профили продольной компоненты скорости  $u$  при вращении являются более наполненными как в критической точке так и на обводе параболоида. Температура газа внутри ударного слоя при враще-



**Рис. 1.** Распределения теплового потока  $q_w$  вдоль поверхности параболоида  $r^2 = 2pz$ , ( $p=1$ ) при  $B=0,5$ : 1 -  $Re = 3 \cdot 10^6$ ; 2 -  $Re = 5 \cdot 10^6$ ; 3 -  $Re = 7 \cdot 10^6$

нии тела больше, чем без вращения. На боковой поверхности это связано с ненулевой азимутальной компонентой скорости  $w$ , которая дает дополнительный вклад в диссипативный разогрев газа в ударном слое.

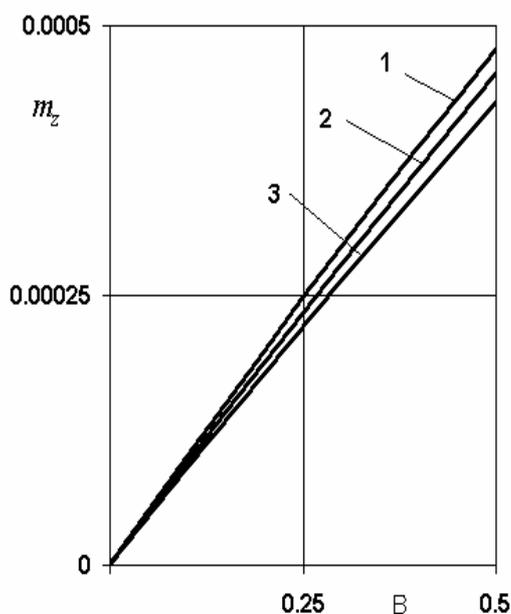
Влияние вращения тела на распределения теплового потока вдоль поверхности параболоида при разных числах Рейнольдса приведено на рис.1. Расчеты показывают, что во всем рассмотренном диа-



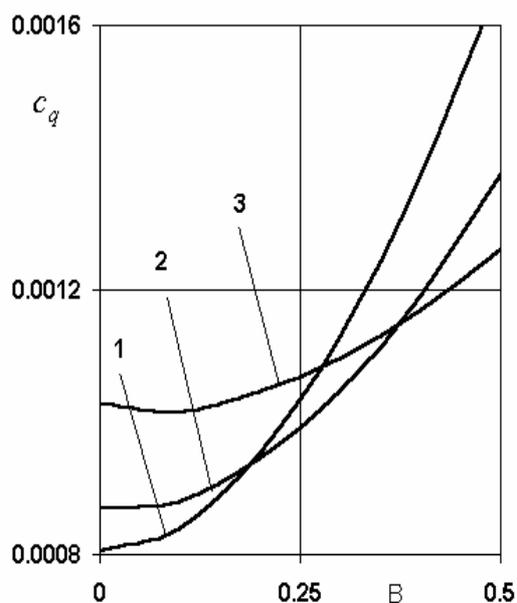
**Рис. 2.** Зависимости коэффициента момента аэродинамических сил от параметра вращения при обтекании параболоида  $r^2 = 2pz$ , ( $p=1$ ) при  $B=0,5$ : 1 -  $Re = 3 \cdot 10^6$ ; 2 -  $Re = 5 \cdot 10^6$ ; 3 -  $Re = 7 \cdot 10^6$

пазоне чисел Рейнольдса наблюдается немонотонное распределение теплового потока вдоль поверхности параболоида. Максимум теплового потока достигается на боковой поверхности параболоида. Рост параметра вращения ведет к увеличению теплового потока к поверхности параболоида.

На рис. 2 приведена зависимость коэффициента момента сил сопротивления от параметра вращения  $B$  при разных числах Рейнольдса. При увеличении



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента момента аэродинамических сил от параметра вращения  $B$  при обтекании параболоида  $r^2 = 2pz$ : 1 -  $p = 1,4$ ; 2 -  $p = 0,8$ ; 3 -  $p = 0,4$



**Рис. 4.** Зависимость коэффициента полного теплового потока от параметра вращения  $B$  при обтекании параболоида  $r^2 = 2pz$ : 1 -  $p = 1,4$ ; 2 -  $p = 0,8$ ; 3 -  $p = 0,4$

параметра вращения коэффициент момента аэродинамических сил увеличивается. Расчеты показывают, что в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса зависимость от параметра вращения коэффициента момента аэродинамических сил близка к линейной.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента момента аэродинамических сил от параметра вращения  $B$  при разных значениях параметра  $p$  параболоида. При увеличении параметра вращения  $B$  коэффициент момента аэродинамических сил увеличивается. Зависимость от параметра вращения коэффициента момента аэродинамических сил близка к линейной.

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента полного теплового потока от параметра вращения  $B$  при разных значениях параметра  $p$  параболоида. С увеличением параметра вращения  $B$  коэффициент полного теплового потока увеличивается.

При увеличении параметра вращения волновое сопротивление уменьшается, сопротивление трения увеличивается, поэтому полное сопротивление трения изменяется незначительно. Коэффициент полного теплового потока возрастает при этих условиях.

#### СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x$  - расстояние вдоль образующей тела;  $y$  - расстояние по нормали от поверхности тела;  $\vartheta$  - меридиональный угол;  $Oz$  - ось симметрии тела;  $z, r$  - оси цилиндрической координат, связанной с носком затупленного тела;  $\alpha$  - угол между касательной к элементу поверхности тела и  $Oz$ ;  $u, v, w$  - компоненты вектора скорости;  $R_0$  - радиус затупления тела;  $a, b, C$  - параметры, характеризующие неравномерность набегающего потока;  $V_\infty, \rho_\infty$  - скорость и плотность газа при  $r \rightarrow \infty$ .

$q_w = \sqrt{\text{Re}} \frac{\mu_\Sigma}{2\sigma_\Sigma K} \frac{\partial T}{\partial y}$  - безразмерный тепловой поток;

$c_p = Z_p / (0.5\rho_\infty U_\infty^2 S_m)$  - коэффициент волнового сопротивления;  $c_t = Z_t / (0.5\rho_\infty U_\infty^2 S_m)$  - коэффициент сопротивления трения;  $c_z = c_p + c_t$  - коэффициент полного сопротивления;  $m_z = M_z / (0.5\rho_\infty U_\infty^2 R_m S_m)$  -

коэффициент момента аэродинамических сил;  $c_q = Q / (0.5\rho_\infty U_\infty^3 S_m)$  - коэффициент полного теплового потока;  $Z = Z_p + Z_f$  - сила полного сопротивления;  $M_z$  - момент аэродинамических сил относительно оси  $Oz$ ;  $Q$  - суммарный тепловой поток к телу;  $R_m, S_m$  - радиус и площадь миделева сечения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука. Физматлит, 1996. 376 с.
2. Тирский Г.А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // Научные труды ИМ МГУ. 1975. № 39. С.5-38.
3. Журавлева Г.С., Пилюгин Н.Н. Турбулентный ударный слой на вращающихся затупленных телах, обтекаемых неравномерным сверхзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува // Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем. Четвертая международная школа-семинар. Сборник материалов. Санкт-Петербург, 2004. Т.1. С.160-163.
4. Пилюгин Н.Н., Тихомиров С.Г., Чернявский С.Ю. Приближенный метод расчета параметров воздуха и интенсивности излучения в дальнем следе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 165-175.
5. Lin T.C., Reeves B.L., Siegelman D. Blunt-body problem in nonuniform flowfields // AIAA J. 1977. V.15. № 8. P.1130-1137.
6. Еремеев И.Г., Журавлева Г.С., Пилюгин Н.Н. Исследование турбулентного течения в вязком ударном слое при обтекании газом затупленных удлиненных тел // ПМТФ. 1993. № 1. С.69-75.
7. Журавлева Г.С., Пилюгин Н.Н. Влияние вдува газа с поверхности сферы на трение и теплообмен при неравномерном турбулентном гиперзвуковом обтекании // ТВТ. 1999. Т.37. № 3. С.427-433.
8. Котляр Я.М., Совершенный В.Д., Стриженов Д.С. Методы и задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1987. 302 с.
9. Дородницын А.А. Плоский пограничный слой в сжимаемом газе // ПММ. 1942. Т.6. Вып.6. С.449-486.
10. Петухов И.В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных уравнений и квадратурные формулы. Доп. к ЖВМ и МФ. № 4. М.: Наука, 1964. С. 304-325.