

**ОПИСАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ФАЗ В ТЕРМОДИНАМИКЕ И В СИСТЕМЕ  
«НАГРЕВАТЕЛЬ-КИПАЮЩАЯ ЖИДКОСТЬ»****АННОТАЦИЯ**

Рассмотрено кипение на проволочном нагревателе, стержне с покрытием, тонкой и толстой пластинах, одиночном ребре. Показана аналогичность оценки устойчивости метастабильных и стабильных состояний по химическому потенциалу в термодинамике и режимов кипения, к которым применимо синергетическое понятие «фазы», с помощью функционалов Ляпунова. Определена граница метастабильности и стабильности режимов кипения, на которой скорость автоволн равна нулю, и составлены диаграммы стабильности. Показано, что скорость автоволн нулевая, если функционал Ляпунова, чья вариационная производная равна нулю на стационарных температурных полях системы «нагреватель-кипящая жидкость», принимает равные значения на «фазах» (что трактуется как «теорема равных площадей»).

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Бистабильность (мультистабильность) системы означает, что при одном и том же воздействии внешней среды («входе») система может находиться в одном из двух (и более) устойчивых к малым возмущениям стационарных состояний. Эти состояния называются «фазами» в синергетическом смысле по глубокой аналогии с термодинамическими фазовыми переходами первого рода в равновесных системах. Здесь устойчивость «в малом» понимается как устойчивость в первом приближении по Ляпунову. Часто одна из «фаз» нежелательна или опасна. А возмущения - как от внешней среды, так и внутренне присущие системе, - могут приводить к смене состояний. Возникает проблема устойчивости «в большом», т.е. определения этих опасных возмущений.

Система «нагреватель – кипящая жидкость» является типичной бистабильной системой, т.к. имеет два устойчивых стационарных состояния, отвечающие пузырьковому и плёночному кипению. Бистабильным системам присущи такие явления самоорганизации, как автоволновые переходы между «фазами», разрушение метастабильных состояний критическими зародышами стабильной «фазы» и т. д.

Термин «фаза» здесь приходится брать в кавычки во избежание путаницы с фазовыми состояниями охладителя: так исторически сложилось, что синергетический подход заимствовал «фазы» из термодинамики, а теперь их применение в теплофизике смешивает термины.

При определённых условиях «фазы» могут находиться в равновесии и сосуществовать совместно, без поддержки извне, сколь угодно долго. Для ки-

пения на стержне или проволоке в большом объёме понятие равновесного теплового потока  $q_{eq}$  было введено и исследовано одним из авторов в 1962—1964 гг. [1, 2]. Аналогичные понятия позже (в конце 60-х годов) возникли при изучении проблемы разрушения сверхпроводимости внешним возмущением. Прослеживаются математические аналогии с теорией горения и взрыва, физикой газового разряда, в которых подобные явления давно и интенсивно исследуются. Постепенно складывалось представление о  $q_{eq}$  как о бифуркационной предельной точке, разграничивающей области метастабильности и стабильности режимов кипения. Такие фазовые переходы в мультистабильных средах в настоящее время интенсивно изучаются с позиций общего синергетического подхода, разрабатывается теоретический аппарат на базе теории автоволновых процессов, обобщения прямого метода Ляпунова на распределённые системы и математической теории катастроф, включающей результаты теории особенностей гладких отображений Уитни и теории бифуркаций динамических систем Пуанкаре—Андроннова.

Это направление безусловно перспективно, хотя при этом нельзя забывать некоторые особенности, свойственные только процессу кипения. Специфика кипения проявляется в том, что устойчивость режима нельзя рассматривать в отрыве от способа обогрева. Для каждого способа обогрева должны быть определены границы областей стабильного и метастабильного кипения. Устойчивость режима кипения также связана с геометрией поверхности нагрева, ориентацией нагревателя в поле силы тяжести, организацией движения жидкости (кипение в большом объёме или трубе).

В данной работе показана аналогичность оценки устойчивости метастабильных и стабильных состояний по химическому потенциалу в термодинамике и режимов кипения по функционалу Ляпунова, чья вариационная производная равна нулю на стационарных температурных полях системы «нагреватель-кипящая жидкость». Для основных способов обогрева показано, что границы областей метастабильности, на которых скорость автоволн равна нулю, определяются из условия равенства значений функционала Ляпунова на синергетических «фазах», геометрически трактуемого как «теорема равных площадей».

## 2. ОПИСАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ФАЗ В ТЕРМОДИНАМИКЕ

Известно, что если нагревать чистую, практически не содержащую растворённых газов жидкость в сосуде с гладкими стенками, то удаётся перегреть жидкость значительно выше температуры кипения при данном давлении. Однако если подвергнуть эту систему какому-либо возмущению, то жидкость в сосуде мгновенно вскипает и превращается в перегретый пар. Существуют и другие типы метастабильных состояний вещества [3].

Рассмотрим ван-дер-ваальсовский газ, уравнение состояния которого запишем в приведённом виде [3]:

$$\left(p + \frac{3}{v^2}\right)(3v - 1) = 8t, \quad (1)$$

где  $v = V/V_{кр}$ ,  $p = P/P_{кр}$ ,  $t = T/T_{кр}$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $V_{кр}$ ,  $P_{кр}$ ,  $T_{кр}$  – приведённые и удельные объём, давление, абсолютная температура и критические их значения. Например, для воды  $P_{кр} = 22.129$  МПа,  $T_{кр} = 374.15$  °С. Изотермы ван-дер-ваальсового газа в  $p$ - $v$ -диаграмме показаны на рис.1. На докритической изотерме 3 изображён фазовый переход А-С-Е жидкость-пар, т.е. двухфазная смесь. По правилу Максвелла заштрихованные на рис.1 площади должны быть равны. Участки А-В и D-Е соответствуют метастабильным состояниям жидкости и пара. Точки А и Е принадлежат бинодали, В и D - спинодали. В точках В и D вещество с вероятностью 100 % перейдёт в стабильное состояние.

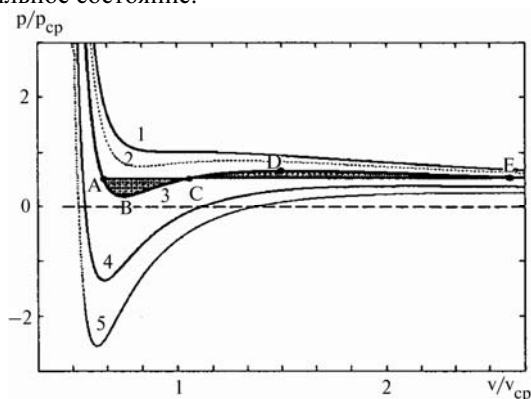


Рис. 1. Изотермы ван-дер-ваальсового газа на  $p$ - $v$ -диаграмме (в приведённом виде): 1-  $T/T_{кр} = 1$ , 2 -  $T/T_{кр} = 0.95$ , 3-  $T/T_{кр} = 0.87$ , 4-  $T/T_{кр} = 0.7$ , 5 -  $T/T_{кр} = 0.6$ , А-В – метастабильное состояние жидкости, В-С-D - физически нереализуемые состояния, D-E - метастабильное состояние пара, А-С-Е - фазовый переход жидкость-пар, (заштрихованные площади равны)

Уравнение (1) относительно  $v$  имеет третью степень, поэтому может иметь три корня, рис. 2. График на рис. 2 показывает частную производную химического потенциала  $\phi(p,t)$  по  $p$  при постоянной  $t$ . Как известно, химический потенциал (удельный массовый изобарно-изотермический потенциал  $\phi$ ) обладает следующими свойствами: если две фазы находятся в равновесии, то равны между собой не только их  $p$ ,  $t$ , но и  $\phi$ ; в изобарно-изотермическом процессе  $\phi$  всегда уменьшается, стремясь к мини-

муму в точках равновесия термодинамической системы.

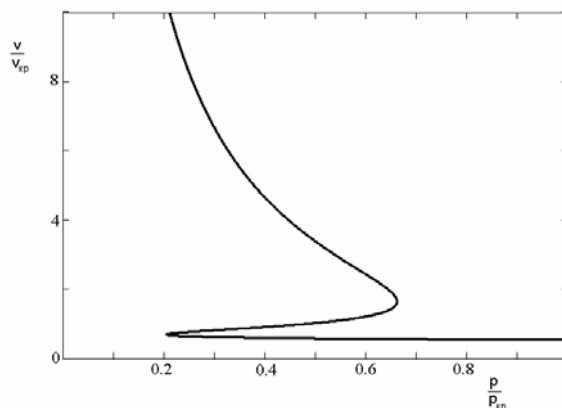


Рис. 2. Три корня уравнения Ван-дер-Ваальса для приведённого удельного объёма, при  $T/T_{кр} = 0.87$

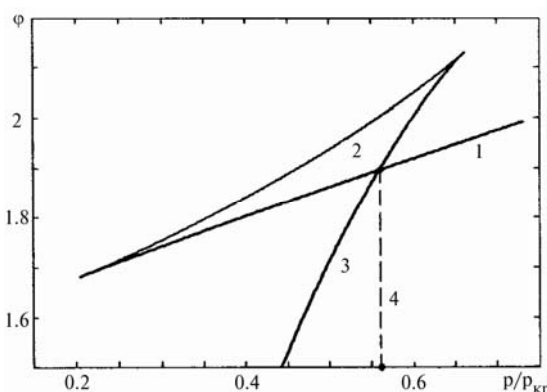


Рис. 3. Зависимость химического потенциала от приведённого давления при  $T/T_{кр} = 0.87$ : 1 – жидкость, 2 – физически нереализуемые состояния, 3 – пар, 4 - точка фазового равновесия (равновесное давление  $p_{eq}$ )

Проинтегрировав зависимость  $v$  (рис. 2) по  $p$  при  $t \equiv \text{const}$ , получим химический потенциал  $\phi$ , рис. 3. Точка 4 показывает величину  $p_{eq}$  давления фазового равновесия. При  $p < p_{eq}$  процесс идёт в сторону перехода вещества из жидкой фазы в паровую, т.е. жидкость метастабильна. При  $p > p_{eq}$  процесс идёт в сторону перехода вещества в жидкую фазу, т.е. пар метастабильна. Из двух фаз стабильна та, у которой  $\phi$  меньше.

Как показано ниже, все отмеченные свойства  $\phi$  присущи функционалу Ляпунова  $J$ , чья вариационная производная [4] равна нулю на стационарных температурных полях систем «нагреватель- кипящая жидкость».

## 3. КИПЕНИЕ ПРИ ПОСТОЯННЫХ: ОБЪЁМНОМ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИИ В СТЕРЖНЕ, СИЛЕ ТОКА ЭЛЕКТРООБОГРЕВА И ТЕМПЕРАТУРЕ ГРЕЮЩЕЙ ТОНКУЮ СТЕНКУ ЖИДКОСТИ

Примем, что, во-первых, стенка нагревателя обладает достаточной теплоёмкостью, чтобы не реагировать на флуктуации, связанные со статистической природой процесса кипения, и аккумулировать достаточно тепла для перестройки режима кипения.

Таким образом, режим кипения однозначно связан с температурой поверхности нагрева. Во-вторых, механизм переноса тепла в кипящей жидкости и гидродинамическая структура пристенного слоя не рассматриваются, но жидкость наделяется свойством отводить тепло от греющей стенки по вполне определенному, найденному из экспериментов, закону (кривой кипения)  $q(\theta)$ , где  $\theta$  - температурный напор стенки. В таких предположениях математической основой является анализ уравнения теплопроводности для поверхности нагрева при условии, что сток тепла, обусловленный кипением, является заданной функцией температуры.

В [5] рассмотрены случаи: 1) достаточно длинного горизонтального стержня с постоянным внутренним тепловыделением ( $q_s = \text{const}$ ), погруженного в большой объём жидкости и выполненного из материала с хорошей теплопроводностью,  $Bi \ll 1$ ; 2) постоянной силы тока ( $I = \text{const}$ ) и зависимости электрического сопротивления материала нагревателя от температуры; 3) кипения в большом объёме на верхней поверхности достаточно протяжённой вдоль  $x$  тонкой горизонтальной пластины, нижняя поверхность которой обогревается жидкостью с температурой  $\theta_{ж} = \text{const}$ . Приведён функционал Ляпунова  $J_1[\theta]$ , показано, что автоволна неподвижна и соблюдается безразличное равновесие режимов, если выполняется условие  $J_1[\theta_1] = J_1[\theta_3]$ , т.е. равенство  $J_1$  на «фазах» - температурах  $\theta_1$  пузырькового кипения и  $\theta_3$  плёночного. Оценена устойчивость режимов кипения с помощью диаграмм стабильности.

Таким образом, режимы  $\theta_1$  и  $\theta_3$  в данном случае являются аналогами фаз в термодинамике, функционал  $J_1$  является аналогом химического потенциала  $\phi$ , роль параметра состояния  $p$  играют величины  $q_s$ ,  $I$ , и  $\theta_{ж}$ , причём  $p_{eq}$  (А-С-Е на рис.1 и точка 4 на рис.3) соответствует равновесным тепловому потоку  $q_{eq}$ , силе тока  $I_{eq}$ , температуре греющей жидкости  $\theta_{ж}^{eq}$ . Правило Максвелла аналогично «теореме равных площадей» для  $q_{eq}$ ,  $I_{eq}$  и  $\theta_{ж}^{eq}$ .

#### 4. ОРЕБРЁННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В [5] рассмотрено кипение на поверхности плоского ребра высотой  $h$  и толщиной  $H$ , достаточно протяжённое вдоль оси  $x$ . Приведён функционал Ляпунова  $J_2$  для двух видов граничных условий в основании ребра: температуре  $\theta_0 = \text{const}$  и тепловом потоке  $q_0 = \text{const}$ . Одному значению  $\theta_0$  могут отвечать три значения  $q_0$  (и наоборот): в режиме  $\theta_{пл}(y)$  вся поверхность ребра занята плёночным кипением, в режиме  $\theta_{пуз}(y)$  - значительная часть поверхности занята пузырьковым кипением, в режиме  $\theta_{пер}(y)$  - по высоте ребра переходное и плёночное кипение. Показано, что автоволна неподвижна и соблюдается безразличное равновесие режимов, если выполняется равенство  $J_2$  на «фазах»:  $J_2[\theta_{пуз}(y)] = J_2[\theta_{пл}(y)]$ , т.е. либо условие  $\theta_0 = \theta_{eq}$ , либо  $q_0 = q_{eq}$ .

Таким образом, режимы, образованные комплексами  $\theta_{пуз}(y)$  и  $\theta_{пл}(y)$ , в данном случае являются

аналогами фаз в термодинамике, функционал  $J_2$  является аналогом химического потенциала  $\phi$ , роль параметра состояния  $p$  играют заданные на обогреваемой нижней поверхности ребра либо температура  $\theta_0$ , либо тепловой поток  $q_0$ , причём  $p_{eq}$  соответствует либо  $\theta_{eq}$ , либо  $q_{eq}$ .

#### 5. СТЕРЖЕНЬ С МАЛОТЕПЛОПРОВОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ И МАЛОТЕПЛОПРОВОДНЫЙ СЕРДЕЧНИК В ОБОЛОЧКЕ

Топливные элементы реакторов, охлаждаемых водой под давлением, имеют цилиндрическую форму и состоят из сердечника (длиной  $L \rightarrow \infty$ , диаметром  $d$ ) с оболочкой толщиной  $h$  ( $d \gg h$ ) и коэффициентом теплопроводности  $\lambda_c$ . Это случай, когда теплопроводность оболочки (покрытия) намного больше теплопроводности сердечника (основы):  $\lambda_c \gg \lambda$ .

При определённых предположениях приближённые уравнения, описывающие температурное поле  $\theta$  сердечника с оболочкой температуры  $t$ , имеют вид:

$$c_p \cdot \frac{d}{4} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lambda \cdot \frac{d}{4} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + [q_s - k_2 \cdot (\theta - t)], \quad (2)$$

$$c_t \rho_t \cdot h \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = h \cdot \lambda_t \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + [k_2 \cdot (\theta - t) - q(t)], \quad (3)$$

Здесь  $c_t$ ,  $\rho_t$  - удельные теплоёмкость и плотность оболочки,  $k_2 = (d/6\lambda + h/\lambda_t + \delta_{газ}/\lambda_{Na})^{-1}$ ,  $\delta_{газ}$ ,  $\lambda_{Na}$  - толщина и теплопроводность газового зазора.

Точки  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  пересечения N-образной кривой кипения  $q(t)$  и линии тепловой нагрузки  $q_s$  являются изотермическими стационарными решениями и соответствуют устойчивому «в малом» пузырьковому режиму, неустойчивому переходному и устойчивому плёночному кипению на поверхности оболочки ТВЭЛа. При этом, как видно из (2),(3), сердечник имеет соответственно температуры  $\theta_i = t_i + q_s/k_2$ ,  $i=1,2,3$  (рис.4).

Аналогичная ситуация имеет место в случае, когда поверхность нагрева окислена, загрязнена или покрыта защитной пленкой с плохой теплопроводностью (основа - стержень длиной  $L \rightarrow \infty$ , диаметром  $d$  имеет наружный слой толщиной  $h$  с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_c$ ). Этот случай достаточно хорошо изучен применительно к композитным сверхпроводникам. Здесь теплопроводность покрытия намного меньше теплопроводности основы:  $\lambda \gg \lambda_c$ . При определённых условиях уравнения, описывающие температурное поле  $\theta$  стержня с изотропным покрытием с температурой  $t$ , совпадают с (2),(3), где:  $c_t$ ,  $\rho_t$  - удельные теплоёмкость и плотность покрытия,  $k_2 = \lambda_c/h$ .

Заметим, что прямая  $k_2(\theta - t)$  и  $q(t)$  могут иметь три точки пересечения, т.е. кривая кипения  $q(\theta)$  в зависимости от температуры основы  $\theta$  может иметь Z-образный вид, рис. 4.

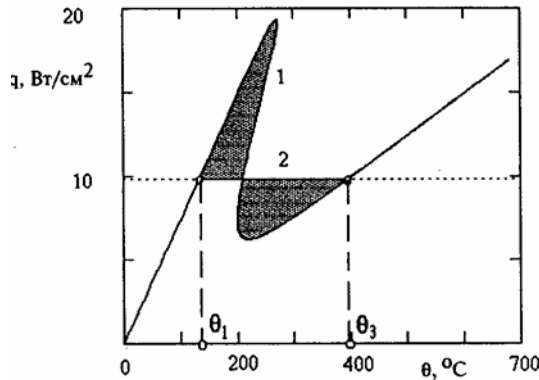


Рис. 4. Кривая кипения фреона R113 на стальном X18H10T стержне с  $d = 3$  мм покрытием из клея BC-10T,  $h = 0.3$  мм, 1 - в зависимости от температуры основы, 2 - равновесная нагрузка  $q_{eq}$ . (Заштрихованные площади равны)

Рассмотрим случай постоянного тепловыделения в основе или сердечнике ( $q_s = \text{const}$ ). Пусть также левая часть нагревателя занята пузырьковым кипением, правая - плёночным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad (4) \\ t \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} t_1, \quad t \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} t_3, \\ \theta \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} t_1 + \frac{q_s}{k_2}, \quad \theta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} t_3 + \frac{q_s}{k_2}. \quad (5) \end{aligned}$$

Функционалом Ляпунова, чья вариационная производная равна правым частям (2),(3), для (2)–(5) является:

$$J_3[\theta, t] = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda \cdot d}{2 \cdot 4} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda_t \cdot h}{2} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 - \\ & - \int_0^\theta [q_s - k_2 \cdot \theta] d\theta - \\ & - \int_0^t [k_2 \cdot (\theta - t) - q(t)] dt \end{aligned} \right\} dx \quad (6)$$

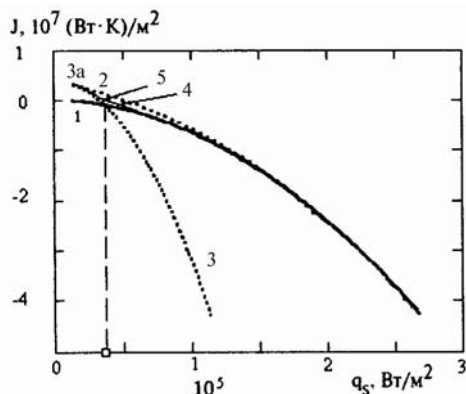


Рис. 5. Диаграмма стабильности режимов кипения для стержня с покрытием: 1 и 1а - стабильное и метастабильное пузырьковое кипение, 3 и 3а - плёночное, 2- переходное, 4, 5- доменные линии, точка-прямоугольник - на значении равновесной  $q_{eq}$

Можно показать, что при дважды непрерывно дифференцируемых  $\theta(x, \tau)$  и  $t(x, \tau)$  уравнением экстремалей Эйлера-Лагранжа для (6) являются стационарные уравнения (2), (3) при граничных условиях (4) либо (5). Функционал (6) имеет аналогичный  $J_1, J_2$  смысл теплового потенциала температурных полей: величина  $J_3[\theta, t]$  экстремальна при стационарных решениях  $\theta(x), t(x)$  и монотонно убывает на других решениях  $\theta(x, \tau), t(x, \tau)$  уравнений (2), (3), т.к.  $dJ/d\tau \leq 0$ .

Если искать решение (2)–(5) в виде автоволны, движущейся со скоростью  $w_3$  вдоль нагревателя, то после замены  $\theta(z) = \theta(x - w_3 \tau), t(z) = t(x - w_3 \tau)$  можно получить выражение

$$w_3 = \frac{J_3[\theta_1, t_1] - J_3[\theta_3, t_3]}{\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ c \cdot \rho \cdot \frac{d}{4} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + c_t \cdot \rho_t \cdot h \cdot \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right\} dz} \quad (7)$$

Выражение (7) следует из (2), (3) в векторной записи после скалярного умножения на вектор  $\{d\theta/dz, dt/dz\}$  и интегрирования по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , с использованием (4)-(5) и (6). Из (7) видно, что автоволна неподвижна и соблюдается безразличное равновесие режимов, если выполняется условие  $J_3[\theta_1, t_1] = J_3[\theta_3, t_3]$ , т.е. равенство  $J$  на «фазах». Заметим, что в случае  $\lambda = \text{const}, q_s = \text{const}$  это эквивалентно равенству заштрихованных площадей как на исходной кривой кипения  $q(t)$ , так и при  $Z$ -образной функции  $q(\theta)$  (рис.4), поскольку интеграл от параметрически заданной плоской кривой  $\theta = t + q(t)/k_2$  и  $q = q(t)$  также равен нулю.

Значения функционала (6) на стационарном профиле температуры характеризуют устойчивость данного профиля. Оценить устойчивость разных режимов кипения можно, если воспользоваться диаграммой стабильности (рис.5). Формулы, по которым считались линии 1, 2 и 3 на рис.5, получены из (6) в виде параметрически заданной кривой, где параметром является температура  $t$  покрытия стержня:

$$\begin{cases} J(t) = \int_0^{\theta(t)} [k_2 \cdot \theta - q_s(t)] d\theta + \int_0^t [q(\xi) - k_2 \cdot (\theta(t) - \xi)] d\xi, \\ q_s(t) = q(t), \\ \theta(t) = t + \frac{q_s(t)}{k_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Если значения функционала (6) на «фазах» равны, то это служит критерием определения границы метастабильности режимов кипения.

Доменные линии [5] (4 и 5 на рис.5) являются аналогом значений химического потенциала  $\phi$  при критическом размере пузырька в системе жидкость - пузырёк пара.

Таким образом, режимы, образованные комплексами  $\theta_1, t_1$  и  $\theta_3, t_3$ , в данном случае являются аналогами фаз в термодинамике, функционал  $J_3$  из (6) является аналогом химического потенциала  $\phi$ , роль параметра состояния  $p$  играет величина тепло-

выделения  $q_s$  в основе или сердечнике, причём  $re_q$  соответствует  $q_{eq}$ .

## 6. ТОЛСТАЯ СТЕНКА, ОБОГРЕВАЕМАЯ С НИЖНЕЙ СТОРОНЫ И ОХЛАЖДАЕМАЯ КИПЕНИЕМ

Рассмотрим стенку толщиной  $H$ , имеющую с нижней стороны обогреваемую поверхность. Если стенка имеет достаточное протяжение вдоль одной из осей  $x$  (ось  $y$  направлена по толщине стенки, длина  $L \rightarrow \infty$ ), то при  $Bi = \alpha_{ж} H / \lambda \gg 1$ , где  $\alpha_{ж}$  – коэффициент теплоотдачи, температурное поле  $\theta(x, y, \tau)$  описывается двумерным уравнением теплопроводности:

$$c_p \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

Граничные условия на охлаждаемой кипением верхней поверхности:

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=H} = q(t), \quad (10)$$

где  $t$  – температура верхней поверхности пластины (при  $y=H$ ). На обогреваемой нижней поверхности, если задана её температура  $\theta_0 = \text{const}$ :

$$\theta \Big|_{y=0} = \theta_0, \quad (11)$$

или если на нижней поверхности задан тепловой поток:

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = q_0 \quad (12)$$

или если обогрев производится горячей жидкостью с температурой  $\theta_{ж}$ :

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha_{ж} \cdot (\theta_{ж} - \theta_0), \quad (13)$$

где  $\theta_0$  – температура нижней поверхности пластины (при  $y=0$ ).

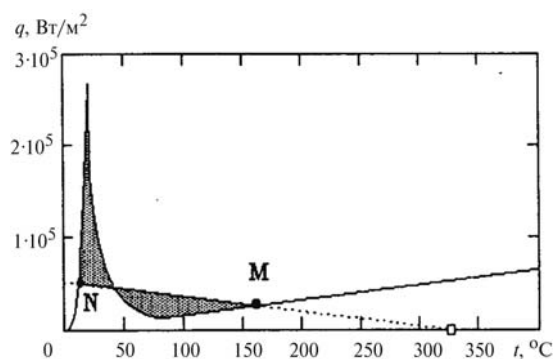


Рис. 6. Кривая кипения фреона R113, линия NM:  $q = (1/\alpha_{ж} + H/\lambda)^{-1} [\theta_{ж} - t]$  при  $\alpha_{ж} = 2 \cdot 10^2$  Вт/м<sup>2</sup>К, латунь,  $H = 7$  см. Прямоугольная точка –  $\theta_{ж}^{eq}$ . Заштрихованные площади равны,  $N - t_1$ ,  $M - t_3$

Если прямая  $\lambda/h \cdot [\theta_0 - t]$  и N-образная кривая кипения  $q(t)$  имеют три точки пересечения, то возможны локально устойчивые режимы  $\theta_{пуз}(y)$  и  $\theta_{пл}(y)$  с температурами на охлаждаемой поверхности:  $t_1$  – пузырьковый и  $t_3$  – плёночный. Из (9)–(11)

следует, что эти режимы имеют линейное распределение по  $y$ :

$$\theta(y) = \theta_0 + \frac{y}{H} \cdot (t - \theta_0). \quad (14)$$

Для (12) температура нагреваемой поверхности тогда равна:

$$\theta_{01} = t_1 + \frac{H}{\lambda} q_0, \quad \theta_{03} = t_3 + \frac{H}{\lambda} q_0, \quad (15)$$

а для (13) соответственно:

$$\theta_{01} = \frac{Bi \cdot \theta_{ж} + t_1}{1 + Bi}, \quad \theta_{03} = \frac{Bi \cdot \theta_{ж} + t_3}{1 + Bi}. \quad (16)$$

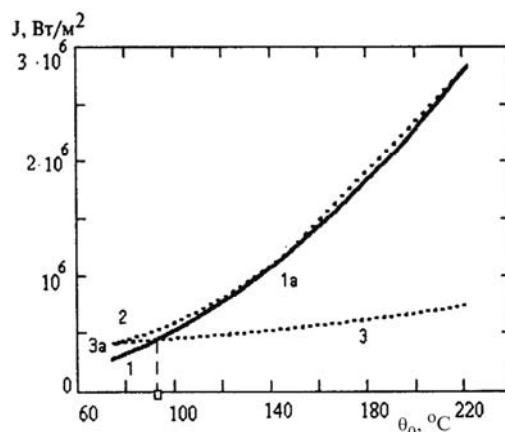


Рис. 7. Диаграмма стабильности режимов кипения для толстой пластины с постоянной температурой нижней поверхности: 1 и 1а – стабильное и метастабильное пузырьковое кипение, 3 и 3а – плёночное, 2 – переходное, точка-прямоугольник – на  $\theta_{eq}$

Пусть левая часть пластины занята пузырьковым кипением, а правая – плёночным:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0, \quad (17)$$

$$\theta \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow \theta_{пуз}(y), \quad \theta \Big|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow \theta_{пл}(y). \quad (18)$$

Функционал Ляпунова для (9)–(13), (17), (18):

$$J_4[\theta] = \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ \int_0^H \frac{\lambda}{2} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \int_0^t q(t) dt - \int_0^{\theta_0} \alpha_{ж} \cdot (\theta_{ж} - \theta) d\theta - \int_0^{\theta_0} q_0 d\theta \right\} dx. \quad (19)$$

Если искать решение (9)–(13), (17), (18) в виде автоволны, движущейся со скоростью  $w_4$  вдоль пластины, то после замены  $\theta(z, y) = \theta(x - w_4 \tau, y)$  можно получить выражение:

$$w_4 = \frac{J_4[\theta_{пуз}(y)] - J_4[\theta_{пл}(y)]}{c \cdot \rho \cdot \int_0^h \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz dy}, \quad (20)$$

где  $\theta_{пуз}(y)$  и  $\theta_{пл}(y)$  определяются из (14) – (16). Выражение (20) следует из (9)–(13) после умножения на  $\partial \theta / \partial z$  и интегрирования сначала по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , затем по  $y$  от 0 до  $h$  с использованием (17), (18), (19).

Из (20) видно, что автоволна неподвижна и соблюдается безразличное равновесие режимов, если выполняется равенство  $J$  на «фазах»:  $J_4[\theta_{\text{пуз}}(y)] = J_4[\theta_{\text{пл}}(y)]$ , т.е. либо условие  $\theta_0 = \theta_{\text{eq}}$  (рис. 7), либо  $q_0 = q_{\text{eq}}$ , либо  $\theta_{\text{ж}} = \theta_{\text{ж}}^{\text{eq}}$  (рис. 6).

Значения функционала (19) на каком-либо стационарном профиле температуры характеризуют устойчивость данного профиля (рис. 7). Формулы, по которым считались линии 1, 2 и 3 на рис. 7, получены из (19) в виде параметрически заданной кривой, где параметром является температура охлаждаемой поверхности пластины:

$$\begin{cases} J(t) = \int_0^t q(\xi) d\xi + \frac{H}{2\lambda} q^2(t) \\ \theta_0(t) = t + \frac{H \cdot q(t)}{\lambda} \end{cases} \quad (21)$$

Если значения функционала (19) на «фазах» равны, то это служит критерием определения границы метастабильности режимов кипения.

Таким образом, режимы, образованные комплексами  $\theta_{\text{пуз}}(y)$  и  $\theta_{\text{пл}}(y)$  из (14)–(16), в данном случае являются аналогами фаз в термодинамике, функционал  $J_4$  из (19) является аналогом химического потенциала  $\phi$ , роль параметра состояния  $p$  играют заданные на обогреваемой нижней поверхности либо температура  $\theta_0$ , либо тепловой поток  $q_0$ , либо температура греющей жидкости  $\theta_{\text{ж}}$ , причём  $p_{\text{eq}}$  соответствует либо  $\theta_{\text{eq}}$ , либо  $q_{\text{eq}}$ , либо  $\theta_{\text{ж}}^{\text{eq}}$ .

Заметим, что все рассмотренные выше случаи можно объединить с помощью вариационной производной функционала  $J$ . Уравнения (2)–(3), (9)–(10) и т.д. можно записать так:

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = - \frac{\delta J}{\delta \theta}, \quad (22)$$

где справа стоит вариационная производная функционала [4] (по свойствам очень похожая на обычную производную). Соотношения для скорости автоволны  $w$  получаются следующим образом. После замены  $\theta(z) = \theta(x - w \cdot \tau)$  из (22) следует:

$$-c\rho w \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{\delta J}{\delta \theta}. \quad (23)$$

Умножив (23) на  $d\theta/dz$  и проинтегрировав по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим:

$$\begin{aligned} -c\rho w \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta J}{\delta \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} dz = \\ &= - \int_{\theta_1}^{\theta_3} \frac{\delta J}{\delta \theta} d\theta = -J[\theta_3] + J[\theta_1], \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\theta_1, \theta_3$  обозначены «фазы»,  $J$  – функционал (6) или (19). Из (24) очевидно следуют (7), (20) и др. для покрытия, ребра, толстой пластины и т.д., а также соответствующие формулировки «теорем равных площадей».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В зависимости от способа обогрева и геометрии нагревателя (стержень без покрытия и с покрытием, тонкая и толстая стенки, оребрение) для разграничения областей метастабильности режимов могут использоваться понятия равновесных: теплового потока  $q_{\text{eq}}$ , силы тока  $I_{\text{eq}}$ , температуры греющей жидкости  $\theta_{\text{ж}}^{\text{eq}}$ , граничной температуры  $\theta_{\text{eq}}$ , определяемые по «теоремам равных площадей», аналогичным правилу Максвелла в термодинамике. Роль термодинамического параметра состояния (давление)  $p$  здесь играют величины  $q_s, I, \theta_{\text{ж}}, \theta_0$ , а термодинамическое понятие фазы соответствует синергетической «фазе» из целого комплекса, обусловленного режимами кипения охладителя, геометрией нагревателя, способом нагрева и т.д., и образующего устойчивый к малым возмущениям стационарный температурный режим. Функционал Ляпунова  $J$ , чья вариационная производная равна нулю на стационарных температурных полях систем «нагреватель – кипящая жидкость», является аналогом химического потенциала  $\phi$ , а величины  $q_{\text{eq}}, I_{\text{eq}}, \theta_{\text{ж}}^{\text{eq}}, \theta_{\text{eq}}$  являются аналогами давления  $p_{\text{eq}}$  при фазовом равновесии.

Разграничивает области метастабильных и стабильных режимов состояние равновесия «фаз», в котором скорость автоволны равна нулю. Для определения условий равновесия можно использовать единую методику расчёта, основанную на функционалах Ляпунова. Наглядно сопоставить режимы кипения по уровню их устойчивости позволяет диаграмма стабильности. Разность значений функционалов на «фазах» характеризует величину и направление скорости автоволны: скорость тем выше, чем эта разность больше. Скорость равна нулю при условии равенства этих значений, что геометрически трактуется как «теорема равных площадей».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kovalev S.A. An investigation of minimum heat fluxes in pool boiling of water // Int. J. Heat Mass Transfer. 1966. V.9. P. 1219-2226.
2. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалёв С.А., Соловьёв С.Л. Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Изд. МЭИ, 2003. 548 с.
3. Кириллин В.А., Сычёв В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. М.: Энергоатомиздат, 1983. 416 с.
4. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. 228 с.
5. Ковалёв С.А., Усатиков С.В. Оценка устойчивости режимов кипения с помощью диаграмм стабильности // ТВТ. 2003. Т.41. №1. С.77-88.